풀이

STEP I 2008, 문제 1

순수수학 • 귀류법

> **STEP I 2008, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q1

핵심 아이디어

유리수(rational number)는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 그리고 0이 아닌 수로 나누는 나눗셈에 대하여 닫혀 있다(closed). 여기서 다루는 거의 모든 내용은 이 한 가지 사실에서 나온다. 어떤 수들이 유리수이면, 그 수들로부터 이 연산들을 써서 만든 수도 모두 유리수이다. 마지막 소문항에서는 네 수 가운데 두 수가 유리수라고 가정하고, 그 두 수를 교묘하게 조합하여 무리수라고 주어진 수 가운데 하나를 만들어 낸다.

풀이

정의

실수 x가 정수 m, n과 $n \neq 0$에 대하여 $x = \frac{m}{n}$ 꼴로 나타내어지면 이 실수를 **유리수**라 한다. 실수가 유리수가 아니면, 즉 $x = \frac{m}{n}$을 만족하는 정수 m과 $n \neq 0$이 존재하지 않으면, 이 실수를 **무리수**(irrational number)라 한다.

명제 A

귀류법(proof by contradiction)을 쓰기 위해, pq는 무리수이지만 p와 q 모두 무리수가 아니라고 가정하자. 그러면 두 수 모두 유리수이므로, 정수 a, b, c, d와 $b, d \neq 0$에 대하여 $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$로 쓸 수 있다. 그러면

$$pq = \frac{ac}{bd},$$

이고, 여기서 ac와 bd는 정수이며 b와 d 모두 0이 아니므로 $bd \neq 0$이다. 따라서 pq는 유리수이고, 이는 가정에 모순이다. 그러므로 p와 q 가운데 적어도 하나는 무리수이다.

명제 B

같은 방법으로, $p+q$는 무리수이지만 $p=\frac{a}{b}$와 $q=\frac{c}{d}$가 모두 유리수이고 $b,d\neq 0$이라고 가정하자. 그러면

$$p+q=\frac{ad+bc}{bd},$$

은 분모가 0이 아닌 정수의 비이므로 $p+q$는 유리수이다. 이 모순으로부터 p와 q 가운데 적어도 하나는 무리수임을 알 수 있다.

명제 C

$p=\sqrt{2}, q=-\sqrt{2}$로 잡자. 두 수 모두 무리수이지만 $p+q=0=\frac{0}{1}$은 유리수이므로 C는 거짓이다.

완전함을 위해 $\sqrt{2}$가 무리수인 이유를 밝혀 둔다. $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$을 기약분수(lowest terms)로 나타냈다고 하면 $m^2=2n^2$이므로 m^2은 짝수이고, 따라서 m도 짝수이다(홀수의 제곱은 홀수이기 때문이다). $m=2k$로 쓰면 $n^2=2k^2$이 되어 n도 짝수가 되는데, 이는 기약분수라는 데에 모순이다. 또 $-\sqrt{2}=\frac{m}{n}$이면 $\sqrt{2}=\frac{-m}{n}$이므로 $-\sqrt{2}$도 무리수이다.

마지막 소문항

π, π^2, $\mathrm{e}\pi$가 무리수라는 사실이 주어져 있다(필요한 것은 이 세 가지 사실뿐이다). 다음 두 가지 간단한 관찰을 되풀이하여 사용한다.

- r와 s가 유리수이면 $r+s$, $r-s$, rs도 유리수이고, $s\neq 0$일 때 r/s도 유리수이다(논증은 A와 B에서 쓴 것과 완전히 같다).
- 따라서 r가 유리수이면 $\frac{1}{2}$이 유리수이므로 $\frac{1}{2}r$도 유리수이다.

또한 $\pi>3>\mathrm{e}>0$이므로 $\pi+\mathrm{e}>0$이고 $\pi-\mathrm{e}>0$이다. 특히 두 수 모두 0이 아니다.

귀류법을 쓰기 위해, 네 수

$$\pi+\mathrm{e},\quad \pi-\mathrm{e},\quad \pi^2-\mathrm{e}^2,\quad \pi^2+\mathrm{e}^2$$

가운데 두 수가 유리수라고 가정하자. 가능한 쌍은 여섯 가지이며, 각각을 하나씩 배제한다.

1. **$\pi+\mathrm{e}$와 $\pi-\mathrm{e}$가 유리수인 경우.** 두 수를 더하면 2π가 유리수이므로 π가 유리수이다. 모순이다.
2. **$\pi^2-\mathrm{e}^2$와 $\pi^2+\mathrm{e}^2$가 유리수인 경우.** 두 수를 더하면 $2\pi^2$이 유리수이므로 π^2이 유리수이다. 모순이다.
3. **$\pi+\mathrm{e}$와 $\pi^2+\mathrm{e}^2$가 유리수인 경우.** 첫 번째 수를 제곱하면 $(\pi+\mathrm{e})^2$이 유리수이고,

$$2\mathrm{e}\pi=(\pi+\mathrm{e})^2-(\pi^2+\mathrm{e}^2),$$

이므로 $e\pi$가 유리수이다. 모순이다.

4. $\pi - e$와 $\pi^2 + e^2$가 유리수인 경우. 마찬가지로

$$2e\pi = (\pi^2 + e^2) - (\pi - e)^2$$

이 유리수이므로 $e\pi$가 유리수이다. 모순이다.

5. $\pi + e$와 $\pi^2 - e^2$가 유리수인 경우. $\pi + e \neq 0$이므로

$$\pi - e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi + e}$$

는 분모가 0이 아닌 유리수끼리의 몫이고, 따라서 유리수이다. 그러면 $\pi + e$와 $\pi - e$가 모두 유리수가 되는데, 이는 경우 1에 의해 불가능하다.

6. $\pi - e$와 $\pi^2 - e^2$가 유리수인 경우. $\pi - e \neq 0$이므로

$$\pi + e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi - e}$$

는 유리수이고, 이번에도 경우 1에 의해 모순이 생긴다.

? **생각해 보기** 경우 6에서 왜 $\pi - e \neq 0$이 필요할까?

0으로 나누는 것은 허용되지 않기 때문이다. "유리수를 유리수로 나누면 유리수이다"라는 단계는 분모가 0이 아닐 때에만 성립한다. 만약 $\pi = e$였다면 $\pi^2 - e^2 = 0$은 유리수이겠지만 $\pi + e$에 대해서는 아무것도 알려 주지 않는다. 여기서는 $\pi - e \approx 0.42$이므로 문제가 없다.

모든 쌍이 모순으로 이어지므로 네 수 가운데 어느 두 수도 동시에 유리수일 수 없다. 따라서 네 수 가운데 유리수는 많아야 하나이며, 이로써 증명이 끝난다.

검산

사용한 항등식은 수치로 쉽게 확인할 수 있다. $\pi \approx 3.14159$, $e \approx 2.71828$로 두면 $(\pi + e)(\pi - e) \approx 5.85987 \times 0.42331 \approx 2.48055 \approx \pi^2 - e^2$이고, $(\pi + e)^2 - (\pi^2 + e^2) \approx 17.0795 \approx 2e\pi$이다. 쌍의 개수도 세어 보자. 네 수에서 $\binom{4}{2} = 6$개의 쌍이 나오고, 여섯 쌍을 모두 다루었다. e와 e^2이 무리수라는 사실은 한 번도 쓰지 않았음에 주목하자. 대칭성에 의해 경우 1과 2에서 π와 π^2 대신 이 두 수를 써도 되었을 것이다.

흔한 실수

- 실수로 A나 B의 역(converse)을 증명하는 것. A는 "곱이 무리수 $\Rightarrow$ 어느 한 인수가 무리수"라는 명제이며, 그 역은 거짓이다($\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$).

- $\pi \pm e$가 0이 아니라는 언급 없이 이 수로 나누는 것.
- 명제 C를 참인 것처럼 사용하는 것. 예를 들어 "π와 e가 무리수이므로 $\pi + e$는 무리수이다"라고 주장하는 것이다. 사실 $\pi + e$가 무리수인지는 아직 풀리지 않은 미해결 문제(open problem)이다.

STEP 너머

여기서 사용한 닫혀 있음에 관한 사실들은 유리수 전체가 **체**(field)를 이룬다는 것을 말해 준다. 체란 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈(0으로 나누는 것은 제외)을 해도 그 집합을 벗어나지 않는 집합이다. 체는 대학 1학년 대수학(algebra) 강의의 핵심 대상이며, "$\pi + e$는 무리수인가?"와 같은 질문은 초월수론(transcendence theory)으로 이어지는데, 이 분야에서는 놀라울 만큼 알려진 것이 적다. 대수학에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 유리수와 무리수에 관한 정수론(number theory)에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.