풀이

STEP III 2007, 문제 9

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP III 2007, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q9

핵심 아이디어

용수철은 두 구슬을 같은 직선을 따라 크기가 같고 방향이 반대인 힘으로 당기거나 밀고, 고리의 수직항력은 반지름 방향이므로 중심에 대한 전체 각운동량(angular momentum)은 계속 0이다. 즉 두 구슬은 서로 거울상처럼 움직인다. 이로써 모든 것이 하나의 좌표로 줄어들고, 에너지 보존(conservation of energy)을 쓰면 θ에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion, SHM)을 얻는다. 함정은 θ가 예각인 반각이라는 점이다. 두 구슬이 충분히 멀어져서 지름의 양 끝을 지나가면 에너지 공식의 꼴이 바뀌고, 운동은 단순 조화 운동의 두 호를 이어 붙여 구해야 한다.

풀이

설정하기

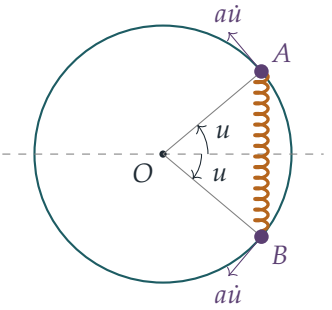
구슬은 고정된 매끄러운 고리 위의 질점으로, 용수철은 질량이 없는 것으로 모형화한다. 구슬에 작용하는 힘은 중력과 고리의 수직항력의 연직 성분(이 둘은 서로 상쇄된다), 수직항력의 수평 성분(고리가 매끄러우므로 반지름 방향), 그리고 용수철의 힘이다. A에 작용하는 용수철의 힘과 B에 작용하는 용수철의 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 AB를 따라 작용하므로, O를 지나는 연직축에 대한 이들의 전체 모멘트(moment)는 0이다. 반지름 방향의 힘은 이 축에 대해 모멘트를 전혀 갖지 않는다. 따라서 이 축에 대한 전체 각운동량은 보존되고, 구슬이 정지 상태에서 출발하므로 그 값은 0이다.

고정된 한 반지름으로부터 고리를 따라 각을 재어, A와 B의 위치를 각각 ϕ_A와 ϕ_B라 하자. 각운동량이 0이라는 것은 $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B) = 0$이라는 뜻이므로 $\phi_A + \phi_B$는 일정하다. 기준

반지름을 처음의 각 AOB를 이등분하도록 잡으면, 모든 시각에서

$$\phi_A = u, \qquad \phi_B = -u,$$

가 하나의 좌표 u에 대해 성립하고, 처음에 $u = \beta$이다. 각 구슬의 속력은 $a\dot{u}$이므로 운동 에너지는 $2 \cdot \frac{1}{2} m a^2 \dot{u}^2 = m a^2 \dot{u}^2$이다.



$0 < u \leq \frac{\pi}{2}$인 동안 각 AOB는 $2u$이지만, u가 $\frac{\pi}{2}$를 넘으면 두 구슬은 지름의 양 끝을 지나간 것이고 각 AOB는 $2\pi - 2u$이다. 따라서

$$\theta = u \quad (0 < u \leq \tfrac{\pi}{2}), \qquad \theta = \pi - u \quad (\tfrac{\pi}{2} \leq u < \pi).$$

구슬이 $u = \beta$에서 정지 상태로부터 놓였으므로, 에너지 보존에 의해

$$m a^2 \dot{u}^2 + m k^2 a^2 (\theta - \alpha)^2 = m k^2 a^2 (\beta - \alpha)^2, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{u}^2 = k^2 [(\alpha - \beta)^2 - (\theta - \alpha)^2].$$

"압축된 상태"라는 것은 용수철이 자연 길이보다 짧다는 뜻이다. 에너지는 $\theta = \alpha$에서 최소이므로 이때가 자연 길이이고, 길이 $2a \sin\theta$는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 θ에 대해 증가한다. 따라서 $0 < \beta < \alpha$이다.

$u \leq \frac{\pi}{2}$인 동안의 운동

이 구간에서는 $\theta = u$이고, 에너지 방정식을 t에 대해 미분한 뒤 $2\dot{u}$로 나누면(구슬이 움직이는 동안에는 성립하고, 나머지는 연속성으로 성립한다)

$$\ddot{\theta} = -k^2(\theta - \alpha).$$

이것은 $\theta = \alpha$를 중심으로 하고 각진동수(angular frequency)가 k인 단순 조화 운동이다. $\theta = \beta$에서 정지 상태로 출발하므로

$$\theta - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt,$$

이고, 따라서 두 구슬은 서로 멀어지며, 아무것도 방해하지 않는다면 $t = \frac{\pi}{k}$에 $\theta = 2\alpha - \beta$에 도달한다. 모든 것은 $2\alpha - \beta$가 $\frac{\pi}{2}$보다 작은지, 즉 β가 $2\alpha - \frac{\pi}{2}$와 비교해 어떠한지에 달려 있다. 이 임계값은 바로 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$이기 때문에 $(0, \alpha)$에 속하므로, 아래의 세 경우가 모두 일어날 수 있다.

경우 1: $2\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \alpha$

이때 $2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$이므로 구슬은 지름의 양 끝에 결코 도달하지 않고, 내내 $\theta = u$이며, 운동은 $\theta = \beta$와 $\theta = 2\alpha - \beta$ 사이의 순수한 단순 조화 운동이다. 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

경우 2: $0 < \beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

이때 θ는 단순 조화 운동이 방향을 바꾸기 전에 $\frac{\pi}{2}$에 도달하며, 그 시각 t_1은

$$\tfrac{\pi}{2} - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt_1, \qquad \text{따라서} \qquad \cos kt_1 = -\lambda, \quad \text{단, } \lambda = \frac{\tfrac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}.$$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $\beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \lambda < 1$이다. 따라서

$$kt_1 = \pi - \arccos\lambda = \tfrac{\pi}{2} + \arcsin\lambda.$$

이 순간 에너지 방정식에 의해 $\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (\frac{\pi}{2} - \alpha)^2] > 0$이므로, 구슬은 여전히 서로 멀어지는 중이고 지름의 양 끝을 지나 계속 움직인다.

생각해 보기 구슬이 지름의 양 끝을 지난 뒤에는 어떤 일이 일어나는가?

$u \geq \frac{\pi}{2}$이면 $\theta = \pi - u$이므로 에너지 방정식은

$$\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (u - (\pi - \alpha))^2],$$

가 되고, 이것은 $u = \pi - \alpha$를 중심으로 하는 u에 대한 단순 조화 운동이며 각진동수는 역시 k이다. 이것은 지름에 이르기 전의 운동을 $u = \frac{\pi}{2}$에 대해 대칭시킨 거울상이다. 따라서 구슬은 다시 시간 t_1이 걸려 $u = \pi - \beta$에서 정지하고(이때 다시 $\theta = \beta$이며, 구슬은 이제 O의 반대편에 있다), 그다음 전체 경로를 되짚어 $u = \beta$로 돌아온다. 구슬은 이러한 단계를 네 번 거친 뒤 처음 위치로 돌아오므로, 운동의 주기는

$$T = 4t_1 = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{2}{k}\left(\pi + 2\arcsin\frac{\pi - 2\alpha}{2(\alpha - \beta)}\right).$$

(구슬이 O의 어느 쪽에 있는지를 구별하지 않는 각 θ 자체는 $2t_1$마다 반복된다.)

경우 3: $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

이때 θ는 단순 조화 운동이 구슬을 정지시키는 바로 그 순간인 $t = \frac{\pi}{k}$에 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$에 도달한다. 그때 구슬은 지름의 양 끝에 있으므로 용수철은 AOB를 따라 놓이고, 각 구슬에 작용하는 용수철의 힘은 반지름 방향이다. 즉 이 힘은 고리를 따르는 성분이 없고, 고리를 따라 작용하는 다른 힘도 없다. 구슬은 평형 상태에서 정지해 있으므로 그 자리에 머문다. 따라서

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

가 진동이 일어나지 않는 값이다. 이는 두 주기와도 들어맞는다. β가 아래쪽에서 이 값에 가까워지면 $\lambda \to 1$이 되고 경우 2의 주기는 경우 1 주기의 두 배인 $\frac{4\pi}{k}$로 수렴하는데, 구슬이 지름 근처에 점점 더 오래 머물기 때문이다.

검산

- $k = 1$, $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$로 잡자. $2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$이므로 이것은 경우 2이다. 그러면 $\lambda = \frac{\pi/8}{\pi/4} = \frac{1}{2}$, $\arcsin\lambda = \frac{\pi}{6}$이고, $T = 2(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} \approx 8.378$이다.
- 두 구슬의 운동 방정식을 수치적으로 단계별 계산해 보았다(에너지를 두 구슬 위치 모두의 함수로 두고, 대칭성은 가정하지 않았다). $k = 1$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.5$일 때 구슬은 8.5162 후에 출발점에서 다시 정지했고, 공식의 값은 8.51622이다. $\beta = 1.0$(경우 1)일 때 주기는 $6.2832 \approx 2\pi$였다.
- 차원: k의 단위는 s^{-1}이므로(에너지는 ma^2k^2에 각의 제곱을 곱한 것이다) $\frac{2\pi}{k}$는 시간이다.

흔한 실수

- 운동 에너지를 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$으로 쓰는 것: 두 구슬이 모두 움직이므로 운동 에너지는 $ma^2\dot{\theta}^2$이다. 인수 2를 빠뜨리면 잘못된 각진동수 $\sqrt{2}\,k$를 얻는다.
- 근거 없이 구슬이 대칭적으로 움직인다고 가정하는 것: 이는 O에 대한 각운동량 보존에서 나오며, 그러려면 각 구슬에 작용하는 용수철의 힘이 같은 직선 AB를 따라 작용해야 한다.
- θ가 예각이라는 것을 잊고 모든 경우에 $\frac{2\pi}{k}$라고 답하는 것.

STEP 너머

보존량을 이용해 두 입자계를 하나의 좌표로 줄이는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 라그랑주 역학에서는 대칭성(여기서는 전체 배치를 O에 대해 회전시키는 것)이 보존 법칙을 낳으며, 이 생각은 뇌터 정리(Noether's theorem)로 엄밀해진다. 경우 2의 운동은 "이중 우물(double-well)" 퍼텐셜에서의 진동으로, 그 주기는 진폭에 따라 달라지며 에너지가 가운데 장벽의 높이와 같아지는 곳에서 불연속적으로 바뀐다. 보존 법칙과 진동에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.