풀이

STEP III 2007, 문제 8

순수수학 • 리카티 방정식

> **STEP III 2007, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q8

핵심 아이디어

비선형(nonlinear) 방정식 $(*)$는 리카티 방정식(Riccati equation)이다. 즉 y^2 항 때문에 선형성(linearity)이 깨진다. y를 u'/u의 상수배로 놓으면 $y' + y^2$이 u''/u로 바뀌어 제곱 항이 사라지고, u에 대한 **선형 2계**(second-order) 방정식이 남는다. (i)의 앞부분에서 바로 그 선형 방정식의 두 해가 주어지므로, 나머지는 상수를 맞추는 일뿐이다. (ii)에서는 새로운 선형 방정식의 두 해가 필요한데, $1 - x$가 $1 + x$에서 x를 $-x$로 바꾼 것이라는 점이 실마리이다.

풀이

소문항 (i)

a와 b 구하기. $u = x$이면 $u' = 1$, $u'' = 0$이므로 다음이 성립해야 한다.

$$\mathrm{a}(x) + x\,\mathrm{b}(x) = 0.$$

$u = \mathrm{e}^{-x}$이면 $u' = -\mathrm{e}^{-x}$, $u'' = \mathrm{e}^{-x}$이다. $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$으로 나누면 다음을 얻는다.

$$1 - \mathrm{a}(x) + \mathrm{b}(x) = 0.$$

첫째 식에서 $\mathrm{b} = -\mathrm{a}/x$ ($x \neq 0$일 때)이고, 이를 둘째 식에 넣으면 $\mathrm{a}(1 + \frac{1}{x}) = 1$이다. 따라서

$$\mathrm{a}(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad \mathrm{b}(x) = -\frac{1}{1+x}.$$

(이 함수들은 $x = 0$에서도 두 조건을 모두 만족한다.) 이 방정식은 선형이고 제차(homogeneous)이며, x와 e^{-x}는 서로의 상수배가 아니므로 일반해(general solution)는

$$u = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

이다. 여기서 A와 B는 임의의 상수이다.

치환. $u \neq 0$일 때 $y = \dfrac{u'}{3u}$로 치환(substitution)한다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u''}{3u} - \frac{(u')^2}{3u^2} = \frac{u''}{3u} - 3\left(\frac{u'}{3u}\right)^2 = \frac{u''}{3u} - 3y^2.$$

따라서 $y' + 3y^2 = \dfrac{u''}{3u}$이다. 제곱 항이 정확히 상쇄되는데, 치환에 인수 3을 넣은 이유가 바로 이것이다. 방정식 $(*)$는

$$\frac{u''}{3u} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{u'}{3u} = \frac{1}{3(1+x)},$$

가 되고, 양변에 $3u$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}u = 0,$$

을 얻어 요구된 결과가 나온다. 이는 앞에서 구한 a와 b를 넣은, 이 소문항 처음의 방정식이다.

특수해. 따라서 $u = Ax + B\mathrm{e}^{-x}$이고,

$$y = \frac{u'}{3u} = \frac{A - B\mathrm{e}^{-x}}{3(Ax + B\mathrm{e}^{-x})}.$$

생각해 보기 상수는 두 개인데 조건은 하나뿐이다. 문제가 될까?

그렇지 않다. u에 0이 아닌 상수를 곱해도 u'/u는 변하지 않으므로 비 $A : B$만 중요하며, 1계(first-order) 방정식에는 자유로운 상수가 하나만 있어야 한다. $x = 0$에서 $y = 0$이라는 조건으로부터 $A - B = 0$이다. 그러면 $B = A \neq 0$ (그렇지 않으면 $u \equiv 0$)이고, A를 약분하면

$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{3(x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

$\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$에서 $x + \mathrm{e}^{-x} \geq 1$이므로 분모는 결코 0이 되지 않는다. 이로써 소문항 (i)이 끝난다.

소문항 (ii)

이번에는 y^2 항의 계수가 1이므로 $y = \dfrac{u'}{u}$를 쓴다. 앞에서와 똑같이

$$y' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{u''}{u} - y^2,$$

이므로 $y' + y^2 = u''/u$이다. 방정식에 u를 곱하면 선형 방정식

$$u'' + \frac{x}{1-x}u' - \frac{1}{1-x}u = 0.$$

을 얻는다. 이는 소문항 (i)의 방정식에서 x를 $-x$로 바꾼 것이다. 실제로 w가 소문항 (i)의 방정식의 해이고 $v(x) = w(-x)$이면 $v'(x) = -w'(-x)$, $v''(x) = w''(-x)$이며, 점 $-x$에서 소문항 (i)의 방정식은

$$v''(x) + \frac{-x}{1-x}(-v'(x)) - \frac{1}{1-x}v(x) = 0,$$

이 되는데, 이것이 바로 새 방정식이다. 따라서 x와 e^{-x}로부터 해 $-x$ (또는 그냥 x)와 e^x를 얻는다. 직접 확인하면, $u = x$일 때 $0 + \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$이고, $u = \mathrm{e}^x$일 때 $\mathrm{e}^x(1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x}) = \mathrm{e}^x(1-1) = 0$이다. 그러므로

$$u = Ax + B\mathrm{e}^x, \qquad y = \frac{u'}{u} = \frac{A + B\mathrm{e}^x}{Ax + B\mathrm{e}^x}.$$

$x = 0$에서 이 값은 $(A+B)/B$이고 이것이 2와 같아야 하므로 $A = B$ (그리고 $B \neq 0$)이다. 따라서

$$y = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{x + \mathrm{e}^x}.$$

이 해는 0을 포함하면서 $x + \mathrm{e}^x > 0$이고 방정식이 정의되는 구간, 즉 $x_0 < x < 1$에서 유효하다. 여기서 $x_0 \approx -0.567$은 $x + \mathrm{e}^x = 0$의 근이다.

검산

- $x = 0$에서 소문항 (ii)의 답은 $2/1 = 2$이고, 이를 미분하면 $y'(0) = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2}{1} = -3$이다. 이는 방정식과 일치한다: $1 - 4 - 0 = -3$.
- $x \to \infty$일 때 소문항 (i)의 답은 $\frac{1}{3x}$처럼 0으로 수렴한다. 이때 $y' \approx -\frac{1}{3x^2}$과 $3y^2 \approx \frac{1}{3x^2}$이 상쇄되고, $\frac{x}{1+x}y \approx \frac{1}{3(1+x)}$이므로 $(*)$와 맞아떨어진다.
- 소문항 (ii)의 방정식을 수치적으로 풀어 보았더니($y(0) = 2$에서 출발하는 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) $y(0.9) = 1.0297654\ldots$를 얻었으며, 이는 공식과 소수점 아래 10자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서도 인수 $\frac{1}{3}$을 그대로 두는 것: 곱하는 인수는 y^2의 계수와 맞아야 하므로, 여기서는 $y = u'/u$이다.
- 조건 하나로 A와 B를 둘 다 정하려는 것. y에 영향을 주는 것은 두 상수의 비뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 확인 없이 다시 e^{-x}를 쓰는 것: $1 - x$의 부호 변화 때문에 이것은 e^x로 바뀐다.

STEP 너머

$y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$ 꼴의 방정식을 리카티 방정식이라 하며, 치환 $y = u'/(Pu)$는 언제나 이를 선형 2계 방정식으로 바꾼다. 거꾸로, 임의의 2계 선형 방정식의 해에 대한 비 u'/u는 리카티 방정식을 만족한다. 이 때문에 이러한 비선형 방정식은 양자역학(quantum mechanics)에서 제어 이론(control theory)에 이르기까지 물리학 곳곳에 거듭 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이 내용과 함께 선형 2계 방정식의 이론(왜 두 개의 독립(independent)인 해가 일반해를 주는지)을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.