풀이

STEP III 2007, 문제 7

순수수학 • 치환적분

STEP III 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q7

핵심 아이디어

"arctan"이나 "π"를 쓸 수 없으므로, 모든 사실은 적분 안에서 변수를 바꾸는 것만으로 얻어야 한다. 각 치환(substitution)은 피적분함수(integrand) $1/(1+u^2)$ (또는 $1/\sqrt{1-u^2}$)가 자기 자신이나 다른 하나로 바뀌고 적분 구간만 달라지도록 고른다. 그러면 적분 구간을 비교하여 t와 s의 값 사이의 등식을 얻고, 소문항 (i)의 대칭성(symmetry) $u \mapsto 1/u$가 이 등식들을 p의 배수로 바꾸어 준다.

풀이

소문항 (i)

$x > 0$이라 하고 $u = v^{-1}$로 놓으면 $\mathrm{d}u = -v^{-2}\,\mathrm{d}v$이다. u가 0에서 x까지 증가할 때 v는 ∞에서 $1/x$까지 감소한다. 또한

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+v^{-2}} = \frac{v^2}{v^2+1}.$$

따라서

$$t(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{v^2}{1+v^2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

이며, 여기서 음의 부호를 이용해 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸었다. 이것이 구하려는 결과이다. (피적분함수가 $1/v^2$ 이하이므로 이 이상적분(improper integral)은 수렴한다.)

x 대신 $1/x$를 넣어 이 결과를 적용하면 $t(1/x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$를 얻는다. 여기에 $t(x) = \int_0^x \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$를 더하면 두 구간이 이어져 $[0,\infty)$가 된다.

$$t(x) + t(1/x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}p \qquad (x > 0).$$

$x = 1$을 대입하면 $2t(1) = \frac{1}{2}p$이다.

소문항 (ii)

$u \geq 0$이면 $0 \leq y < 1$이다. 양변을 제곱하면 $y^2(1+u^2) = u^2$이므로 $u^2(1-y^2) = y^2$이고

$$u = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

이다. u와 y의 부호가 같으므로 양의 제곱근을 택하였다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{1-y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2} = \frac{(1-y^2)+y^2}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^3}},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

이제 $t(x)$에 치환한다. $u^2 = y^2/(1-y^2)$에서

$$1 + u^2 = \frac{1}{1-y^2},$$

이므로

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = (1-y^2)\cdot\frac{1}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

사상 $u \mapsto y$는 증가함수이고(그 역함수(inverse function)의 도함수(derivative)가 양수이므로), $u = 0 \mapsto y = 0$, $u = x \mapsto y = x/\sqrt{1+x^2}$이며 이 값은 1보다 작다. 따라서

$$t(x) = \int_0^{x/\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = s\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$x = 1$일 때 이 식은 소문항 (i)에 의해 $s(\frac{1}{\sqrt{2}}) = t(1) = \frac{1}{4}p$가 된다.

소문항 (iii)

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$로 놓으면 $z = \dfrac{u+a}{1-au}$이다. $0 \leq u \leq a$에서 $au \leq \frac{1}{3}$이므로 분모는 양수로 유지되고, 그 구간에서 z는 u의 매끄러운 함수이다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

> **생각해 보기** 이 치환이 왜 $1/(1+u^2)$를 바꾸지 않아야 할까?

$1+z^2$을 통분하여 계산한다. 교차항 $\mp 2au$가 소거된다.

$$1 + z^2 = \frac{(1-au)^2 + (u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1 + a^2u^2 + u^2 + a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

나누면

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{1+u^2},$$

이므로 피적분함수는 그대로이고 적분 구간만 움직인다. (이 뒤에는 탄젠트의 덧셈정리(tangent addition formula)가 숨어 있지만, 그것은 필요하지 않다.) $u = 0$일 때 $z = a = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. $u = a$일 때

$$z = \frac{2/\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

따라서

$$t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

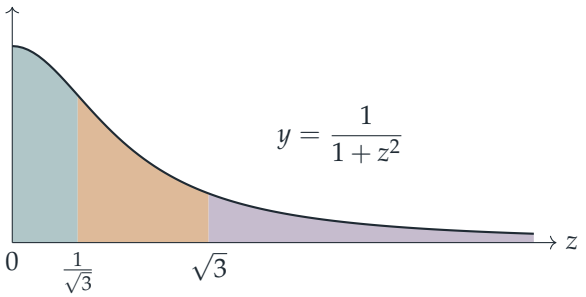
마지막 단계로, 구간 $[0,\infty)$를 $\frac{1}{\sqrt{3}}$과 $\sqrt{3}$에서 나눈다.

$$\tfrac{1}{2}p = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

첫째 조각은 정의에 의해 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$이고, 둘째 조각은 방금 보인 것에 의해 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$이다. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$으로 놓고 소문항 (i)을 적용하면 셋째 조각 $\int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = t(x) = t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 역시 같은 값이다. 따라서

$$3\,t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \tfrac{1}{2}p.$$

아래 그림은 세 조각을 보여 준다. 0에서 ∞까지 $1/(1+z^2)$ 아래의 넓이가 넓이가 같은 세 영역으로 나뉜다.



검산

수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)으로) 계산하면 $t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 0.5235988$이고 $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \approx 0.5235988$이며, $p \approx 3.1415927$이므로 $3t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 1.5707963 \approx \frac{1}{2}p$이다. 마찬가지로 $s(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx t(1) \approx 0.7853982 \approx \frac{1}{4}p$이다. 물론 p는 사실 π이고, 이 결과들은 $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$를 말해 준다. 이를 검산에 이용할 수는 있지만 답안에 써서는 안 된다.

흔한 실수

- $u = 1/v$로 치환하면 적분 방향이 뒤집힌다는 것을 잊는 실수. du의 음의 부호가 적분 구간을 다시 올바른 순서로 되돌려 준다.
- 소문항 (iii)에서 치환만 하고 멈추는 실수. $\frac{1}{\sqrt{3}}$에서 $\sqrt{3}$까지의 적분은 같은 세 조각 중 하나일 뿐이며, $\sqrt{3}$ 너머의 조각에는 소문항 (i)이 필요하다.
- 구간에서 $1 - au \neq 0$인지 확인하지 않는 실수. 여기서는 $au \leq \frac{1}{3}$이므로 치환이 타당하다.

STEP 너머

이 문제는 해석학자(analyst)들이 삼각함수(trigonometric functions)를 엄밀하게 정의하는 방법을 엿보게 해 준다. $\arctan x$를 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$로 정의하고, π를 무한대에서의 그 극한(limit)의 두 배로 정의한 다음, 기하를 전혀 쓰지 않고 이와 같은 치환들로부터 모든 성질을 유도한다. 소문항 (iii)의 치환은 모습을 바꾼 tan의 덧셈정리이며, 같은 방법으로 $xy < 1$일 때 $t(x) + t(y) = t\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$를 증명할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 적분과 멱급수(power series)를 이용해 이러한 정의를 튼튼한 기반 위에 세우는 방법을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.