풀이

STEP III 2007, 문제 6

순수수학 • 복소수와 원

> **STEP III 2007, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q6

핵심 아이디어

원점을 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에서는 켤레(conjugation)를 취하는 것이 반전(inversion)과 같다. 즉 $pp^* = a^2$이므로 $p^* = a^2/p$이다. 이 한 가지 사실만으로 문제에 나오는 모든 켤레복소수가 평범한 분수로 바뀌고, 항등식(identity)이 저절로 나온다. 수직(perpendicular)인지 판정하려면 두 현(chord) 벡터의 비가 순허수(purely imaginary)인지 확인하면 된다. 그러면 항등식이 이 판정 기준을 간단한 곱의 조건으로 바꾸어 준다. 다각형 문제에서는 이 곱의 조건이 점화식(recurrence)이 된다. B_1을 정하고 나면 나머지 B_k는 모두 강제로 결정되고, 남는 질문은 한 바퀴 돌아 B_1로 돌아왔을 때 사슬이 닫히느냐 하는 것뿐이다.

풀이

항등식

P가 원 위에 있으므로 $|p| = a$이고, 따라서 $pp^* = a^2$, $p^* = a^2/p$이다. 마찬가지로 $q^* = a^2/q$이다. 그러므로

$$p^* - q^* = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{q} = \frac{a^2(q-p)}{pq} = -\frac{a^2(p-q)}{pq}.$$

$p \neq q$이므로 (그리고 $a > 0$이므로 $p, q \neq 0$이므로) 이 값은 0이 아니고, 따라서 식을 정리할 수 있다.

$$pq = -a^2 \frac{p-q}{p^* - q^*},$$

이것이 증명하려던 식이다.

수직인 현

현 PQ는 복소수 $p-q$의 방향이고, RS는 $r-s$의 방향이다. 두 복소수의 비의 편각이 둘 사이의 각이므로, 0이 아닌 두 복소수가 수직일 필요충분조건은 그 비

$$w = \frac{p-q}{r-s}$$

가 순허수인 것이다.

생각해 보기 "w가 순허수이다"를 써먹을 수 있는 방정식으로 어떻게 바꿀까?

0이 아닌 w가 순허수일 필요충분조건은 $w^* = -w$, 즉 $w/w^* = -1$이다. 두 현에 대하여 항등식을 쓰면 (두 번째 현에서는 p, q 대신 r, s를 넣어)

$$\frac{w}{w^*} = \frac{p-q}{p^*-q^*} \cdot \frac{r^*-s^*}{r-s} = \frac{-pq/a^2}{-rs/a^2} = \frac{pq}{rs}.$$

따라서 $PQ \perp RS$일 필요충분조건은 $pq/rs = -1$이다. $rs \neq 0$이므로 이는 곧

$$pq + rs = 0.$$

여기서 모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 문제에서 요구한 것보다 조금 더 많은 것을 보인 셈이다. 즉 이 원의 현에 대하여 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$이다. 아래에서 이 역(converse) 방향이 필요하다.

다각형 문제

점 A_k와 B_k를 각각 α_k와 β_k로 나타내자. 앞의 결과(와 그 역)에 의해, n개의 수직 조건은 정확히

$$\beta_k\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \qquad \beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1,$$

이다. 단, 각 B_kB_{k+1}이 실제로 현이 되도록 이웃한 B들은 서로 달라야 한다.

β_1을 정하자. 그러면 $\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$이므로 처음 $n-1$개의 조건에 의해 $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$이 차례로 강제로 결정되고, 각 β_{k+1}의 절댓값은 자동으로 a이다. 처음 몇 개를 계산하면

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}, \qquad \beta_3 = -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2} = \frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1}, \qquad \beta_4 = -\frac{\alpha_3\alpha_4}{\beta_3} = -\frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_1},$$

이고, 간단한 수학적 귀납법(induction)으로

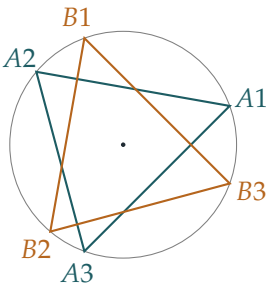
$$\beta_k = \frac{\alpha_k\beta_1}{\alpha_1} \ (k\text{가 홀수}), \qquad \beta_k = -\frac{\alpha_1\alpha_k}{\beta_1} \ (k\text{가 짝수}).$$

를 얻는다. (k일 때 성립하면 $\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$에 의해 $k+1$일 때 다른 쪽 형태가 나온다.) 이제 모든 것은 마지막 조건 $\beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1$이 성립하느냐에 달려 있다.

$n = 3$. 이 경우 $\beta_3 = \alpha_3\beta_1/\alpha_1$이므로 닫힘 조건은

$$\frac{\alpha_3\beta_1^2}{\alpha_1} = -\alpha_3\alpha_1 \iff \beta_1^2 = -\alpha_1^2 \iff \beta_1 = \pm \mathrm{i}\,\alpha_1.$$

이다. 따라서 B_1을 고르는 방법은 두 가지뿐이다. $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$이면 공식에 의해 $\beta_2 = \mathrm{i}\alpha_2$, $\beta_3 = \mathrm{i}\alpha_3$이고, $\beta_1 = -\mathrm{i}\alpha_1$이면 모든 $\beta_k = -\mathrm{i}\alpha_k$이다. 어느 경우든 삼각형 $B_1B_2B_3$은 삼각형 $A_1A_2A_3$을 중심에 대하여 직각만큼 회전한 것이다. 꼭짓점들이 서로 다르므로 두 경우 모두 실제로 조건을 만족하며, 현을 90° 회전하면 당연히 원래 현과 수직이 된다.



그림은 $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$을 고른 경우이다. 호박색 삼각형의 각 변은 대응하는 청록색 변을 90° 돌린 것이다.

$n = 4$. 이제 $\beta_4 = -\alpha_1\alpha_4/\beta_1$이므로

$$\beta_4\beta_1 = -\alpha_1\alpha_4$$

는 β_1이 무엇이든 자동으로 성립한다. 따라서 B_1은 원 위 **어디에나** 놓을 수 있고, 고르는 방법은 무수히 많다. 예외는 이웃한 두 B가 일치하게 되는 유한 개의 위치뿐이다. 예를 들어 $\beta_1 = \beta_2$가 되려면 $\beta_1^2 = -\alpha_1\alpha_2$이어야 하므로 두 점이 제외된다. 네 가지 일치 각각이 많아야 두 점을 제외하므로, 제외되는 위치는 많아야 여덟 개이다.

$n > 4$. 같은 계산이 모든 n에 대하여 통하며, 중요한 것은 n의 홀짝성(parity)뿐이다.

- n이 홀수이면 닫힘 조건은 $\beta_1^2 = -\alpha_1^2$이다. 고르는 방법은 정확히 두 가지, $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$이고, $B_1B_2\cdots B_n$은 다각형 $A_1A_2\cdots A_n$을 중심에 대하여 $\pm 90°$ 회전한 것이다.
- n이 짝수이면 닫힘 조건은 자동으로 성립한다. B_1은 이웃한 B들을 일치시키는 많아야 $2n$개의 위치를 제외하면 원 위 어느 점이어도 되므로, 고르는 방법은 무수히 많다.

검산

- $p = a$, $q = \mathrm{i}a$로 해 보자. 그러면 $pq = \mathrm{i}a^2$이고, $-a^2(a - \mathrm{i}a)/(a + \mathrm{i}a) = -a^2 \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}a^2$이므로 예상대로이다.

- 서로 수직인 지름 $p = a, q = -a$와 $r = \mathrm{i}a, s = -\mathrm{i}a$로 해 보자. $pq + rs = -a^2 + a^2 = 0$이다.
- 수치적으로, 무작위 배치 1000개에서 항등식과 판정 기준 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$을 확인했다. $n = 3, \ldots, 9$에 대해서는 무작위 시작점에서 점화식을 돌렸다. n이 홀수일 때 B_1을 원을 따라 0.1° 간격으로 훑어 보니, 사슬은 $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ 근처에서만 닫혔다. n이 짝수일 때는 매번 닫혔고, 모든 현이 반올림 오차 범위 안에서 수직이었다.

흔한 실수

- "수직 $\Rightarrow pq + rs = 0$"만 증명하는 것. 다각형 문제에서는 우리가 구성한 β들이 실제로 수직인 현을 만든다는 것을 알기 위해 역도 필요하다.
- "수직이란 w가 순허수라는 뜻"을 $w \neq 0$이라는 언급 없이 $w + w^* = 0$으로 쓰는 것. 여기서는 점들이 서로 다르므로 $w \neq 0$이 보장된다.
- n이 짝수일 때, 몇몇 위치에서는 이웃한 두 B가 일치하여 "현"의 방향이 정해지지 않는다는 것을 놓치고 "모든 B_1이 된다"고 말하는 것.

STEP 너머

사상 $z \mapsto a^2/z^*$는 원 $|z| = a$에 대한 **반전**이며, 원 위의 점들이 이 사상에 의해 고정된다는 사실($p = a^2/p^*$)이 이 문제 전체를 움직인 원동력이었다. 반전은 뫼비우스 변환(Möbius transformations)의 하나이며, 뫼비우스 변환은 복소해석학(complex analysis)과 기하학 첫 강의의 핵심 주제이다. 다각형 논증에는 **모노드로미**(monodromy)의 느낌이 있다. 즉 강제된 선택의 사슬을 따라 고리를 한 바퀴 돈 다음 출발점으로 돌아오는지를 묻는 것이고, 그 답은 n의 홀짝성에 달려 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 반전과 이러한 기하학적 아이디어를 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.