풀이

STEP III 2007, 문제 5

순수수학 • 고계 도함수와 귀납법

STEP III 2007, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q5

핵심 아이디어

r와 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$를 θ만으로 나타내면 모든 것이 간단해진다. $\coth\theta = x$로부터 $r = 1/\sinh\theta$를 얻고, 이어서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = \cosh\theta$와 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$를 얻는다. 그러면 $\cosh n\theta/r^n$을 미분할 때 정확히 $\cosh(n+1)\theta$에 대한 덧셈정리(compound-angle formula)가 나타나고, 이것이 수학적 귀납법(induction)의 발판이 된다.

풀이

준비

$x > 1$이므로 $\coth\theta = x$는 $\theta > 0$인 해를 유일하게 가지고, 따라서 $\sinh\theta > 0$이다. $\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$를 이용하면

$$r^2 = x^2 - 1 = \coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}, \qquad \text{이므로} \qquad r = \frac{1}{\sinh\theta},$$

이다. 여기서 r와 $\sinh\theta$가 모두 양수이므로 양의 제곱근을 택했다.

두 도함수가 모든 일을 해 준다. $\coth\theta = x$를 x에 대하여 미분하면

$$-\operatorname{cosech}^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\sinh^2\theta = -\frac{1}{r^2}.$$

$r^2 = x^2 - 1$을 미분하면 $2r\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2x$이므로

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{r} = \coth\theta\,\sinh\theta = \cosh\theta.$$

처음 두 도함수

$y = \ln r^2 = 2\ln r$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cosh\theta}{r},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. 이계도함수는 $1/r = \sinh\theta$로 쓰는 것이 가장 깔끔하다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cosh\theta\sinh\theta = \sinh 2\theta$이다. 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\cosh 2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cosh 2\theta}{r^2},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

삼계도함수

이제 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\cosh 2\theta\sinh^2\theta$로 쓰고, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$와 함께 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= -2(2\sinh 2\theta\sinh^2\theta + 2\cosh 2\theta\sinh\theta\cosh\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\ &= 4\sinh^3\theta(\cosh 2\theta\cosh\theta + \sinh 2\theta\sinh\theta)\\ &= 4\sinh^3\theta\cosh 3\theta,\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 항등식 $\cosh(A+B) = \cosh A\cosh B + \sinh A\sinh B$를 이용했다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{4\cosh 3\theta}{r^3}.$$

일반 공식

$2\cosh\theta/r$, $-2\cosh 2\theta/r^2$, $4\cosh 3\theta/r^3$이라는 패턴은 계수가 $2\cdot 0!$, $-2\cdot 1!$, $2\cdot 2!$임을 시사하므로, 다음과 같이 추측한다.

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \qquad (n \geq 1).$$

? 생각해 보기 방금 삼계도함수에 대해 한 계산을 일반화하면 어떤 계산이 되는가?

그것은 $\cosh n\theta/r^n = \cosh n\theta\,\sinh^n\theta$의 도함수이다. $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$와 함께 곱의 미분법과 연쇄법칙을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh n\theta\,\sinh^n\theta) &= (n\sinh n\theta\,\sinh^n\theta + n\cosh n\theta\,\sinh^{n-1}\theta\cosh\theta)(-\sinh^2\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,(\cosh n\theta\cosh\theta + \sinh n\theta\sinh\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,\cosh(n+1)\theta,\end{aligned}$$

즉

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh n\theta}{r^n}\right) = -\frac{n\cosh(n+1)\theta}{r^{n+1}}.$$

이제 귀납법을 적용한다. $n = 1$일 때 공식은 성립한다(앞에서 구한 일계도함수이다). 어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 공식이 성립한다고 가정하자. 그러면 위의 계산을 $n = k$로 적용하여

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = (-1)^{k-1}\,2\,(k-1)!\cdot\left(-\frac{k\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}}\right) = (-1)^k\,\frac{2\,k!\,\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}},$$

을 얻고, 이것은 $n = k+1$일 때의 공식이다. 귀납법에 의하여

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \quad \text{모든} n \geq 1.}$$

이다. ($n = 2$와 $n = 3$인 경우는 직접 구한 결과와 일치한다.)

두 번째 방법

부분분수(partial fractions)를 이용하면 독립적으로 유도할 수 있다. $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$이므로

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[(x-1)^{-n} + (x+1)^{-n}].$$

그런데 $x \pm 1 = \dfrac{\cosh\theta \pm \sinh\theta}{\sinh\theta} = r\,\mathrm{e}^{\pm\theta}$이므로 대괄호 안은 $r^{-n}(\mathrm{e}^{-n\theta} + \mathrm{e}^{n\theta}) = 2\cosh n\theta / r^n$이 되어 같은 공식을 얻는다. 이것은 치환이 어디에서 왔는지도 설명해 준다. θ는 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$의 절반이다.

검산

- $x = 2$에서: 부분분수로 $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3 = 2\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{56}{27} \approx 2.0741$을 얻고, $\theta = \tanh^{-1}\frac{1}{2}$, $r = \sqrt{3}$일 때 $4\cosh 3\theta / r^3$도 같은 값을 준다.
- 처음 세 도함수를 $x > 1$인 무작위 점 200개에서 $\ln(x^2-1)$의 유한차분(finite differences)과 비교했고, 일반 공식을 $n \leq 14$에 대하여 부분분수 꼴과 비교했다(약 10^{-14}까지 일치).
- 부호: $x > 1$에서 $\ln(x^2-1)$은 증가하고 위로 오목(concave)하므로 $y' > 0$, $y'' < 0$과 맞아떨어진다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = +\sinh^2\theta$로 쓰는 실수: $\coth\theta$의 도함수는 $-\operatorname{cosech}^2\theta$이고, 바로 이 음의 부호 때문에 도함수의 부호가 번갈아 바뀐다.

- 계승을 하나 틀리게 쓰는 실수: 일계도함수의 계수가 $2 = 2 \cdot 0!$이므로 n계도함수에는 $(n-1)!$이 붙는다.
- 몇 가지 경우만 확인하고 멈추는 실수: "증명하라"는 일반적인 귀납 단계를 요구한다.

STEP 너머

모든 도함수에 대한 이 깔끔한 닫힌 꼴은 복소해석학(complex analysis)을 엿보게 해 준다. $\ln(x^2-1)$은 $x = \pm 1$에서 특이점(singularities)을 가지며, 그 고계도함수는 이 특이점까지의 거리, 여기서는 $x \mp 1 = re^{\mp\theta}$에 의해 결정된다. 대학 1학년 해석학 강의에서는 테일러 급수(Taylor series)의 나머지항을 어림하고 수렴반지름(radius of convergence)을 구할 때 바로 이런 공식이 필요하다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 왜 특이점이 멱급수(power series)를 지배하는지를 아름답게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.