풀이

STEP III 2007, 문제 4

순수수학 • 매개변수 곡선과 곡률

> **STEP III 2007, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q4

핵심 아이디어

모든 것은 $\dot{x}$에 대한 깔끔한 식에 달려 있다. 다루기 까다로운 항 $\ln\tan\frac{1}{2}t$를 미분하면 $1/\sin t$가 되고, 그러면 $\dot{x}$는 $a\cos^2 t/\sin t$로 간단해진다. $\dot{x}$와 $\dot{y}$를 구하고 나면 기울기(gradient), 접선(tangent), 곡률(curvature), 법선(normal)은 모두 간단한 좌표기하로 따라 나온다. 단위 접벡터를 $(\cos t, \sin t)$로 쓰면 마지막 부분이 매우 짧아진다.

풀이

기울기

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\tan\frac{1}{2}t = \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{\sin t}$이므로 다음을 얻는다.

$$\dot{x} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t},$$
$$\dot{y} = a\cos t.$$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서 둘 다 양수이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a\cos t\cdot\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \tan t,$$

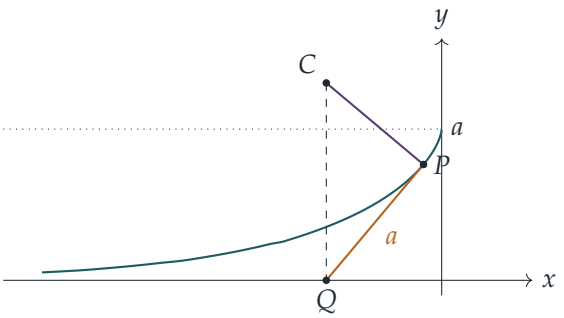
이고, 이것이 보이려던 결과이다.

개형 그리기

- $t \to 0^+$일 때 $\tan\frac{1}{2}t \to 0^+$이므로 $x \to -\infty$이고 $y \to 0$이다. x축이 점근선(asymptote)이다.

- $t \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $x \to a(0 + \ln 1) = 0$이고 $y \to a$이다. 곡선은 $(0, a)$에서 끝나며, 그곳에서 기울기 $\tan t \to \infty$이므로 접선은 수직이다.
- $\dot{x} > 0$이므로 x는 t와 함께 증가하고, 기울기 $\tan t$도 증가한다. 따라서 곡선은 꾸준히 올라가며 아래로 볼록(concave upwards)하고, y는 0과 a 사이에 있다.

이 곡선을 **추적선**(*tractrix*)이라 한다. 그림에는 뒤의 소문항에 나오는 점 P, Q, C도 함께 나타내었다.



접선: $PQ = a$

$P = (x, y)$에서의 접선의 기울기는 $\tan t$이다. 이 접선은 P에서 수평 방향으로 $y/\tan t$만큼 뒤로 간 곳에서 $y = 0$과 만나므로

$$x_Q = x - \frac{y}{\tan t} = x - \frac{a \sin t \cos t}{\sin t} = x - a\cos t.$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{QP} = (a\cos t,\ a\sin t)$이고

$$PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = a.$$

이다. 즉 곡선에서 x축까지의 접선의 길이는 항상 a이다. (뒤에서 쓰기 위해 적어 두면 $x_Q = a \ln \tan \frac{1}{2}t$이다.)

곡률 반지름

미분하기 쉽도록 $\dot{x} = a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)$로 쓰면

$$\ddot{x} = a\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\right), \qquad \ddot{y} = -a\sin t.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} &= \frac{a\cos^2 t}{\sin t}(-a\sin t) + a\cos t \cdot a\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \cos t\right) \\ &= a^2\left(-\cos^2 t + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\right) = a^2\cot^2 t,\end{aligned}$$

이고

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1\right) = \frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t} = a^2\cot^2 t.$$

이다. 주어진 범위에서 $\cot t > 0$이므로 $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = a^3\cot^3 t$이고, 따라서

$$\rho = \frac{a^3\cot^3 t}{a^2\cot^2 t} = a\cot t,$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

곡률 중심: CQ는 수직이다

P에서의 접선은 단위벡터 $(\cos t, \sin t)$ 방향이므로, 법선은 $(-\sin t, \cos t)$ 방향이거나 그 반대 방향이다.

> **생각해 보기** 두 법선 방향 중 어느 쪽이 "곡선 위쪽"인가?

$\cos t > 0$이므로 벡터 $(-\sin t, \cos t)$의 y성분은 양수이다. 곡선이 아래로 볼록하므로 P에서 이 방향으로 조금 움직이면 곡선 위쪽으로 가게 된다(어쨌든 반대 방향은 아래쪽으로 향한다). 따라서

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \rho(-\sin t, \cos t) = \big(x - a\cot t\sin t,\ a\sin t + a\cot t\cos t\big).$$

이다. 접선 부분의 결과에 의해 x좌표는

$$x_C = x - a\cos t = x_Q$$

이다. 그러므로 C와 Q는 x좌표가 같고, CQ는 y축에 평행하며, 이것이 보이려던 결과이다. (y좌표는 $a\sin t + \dfrac{a\cos^2 t}{\sin t} = \dfrac{a}{\sin t}$로 간단해지므로 $C = \big(a\ln\tan\tfrac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t\big)$이다.)

검산

- $a = 1, t = \frac{5\pi}{18}$ (50°)일 때 $P \approx (-0.1202, 0.7660)$이고 $Q \approx (-0.7630, 0)$이므로 $PQ = 1.0000$이다. 공식에 따르면 $C \approx (-0.7630, 1.3054)$로, Q의 바로 위에 있다.
- a와 t의 무작위 값 2000개에 대해 $\dot{x}$, $\ddot{x}$를 유한 차분(finite differences)으로 구해 수치적으로 확인한 결과, 반올림 오차 범위 안에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan t$, $PQ = a$, $\rho = a\cot t$, $x_C = x_Q$와 일치하였다.
- $t \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $\rho \to 0$이다. 즉 곡선은 $(0, a)$에 가까워질수록 점점 더 급하게 휜다(y축에 대한 대칭 이미지가 그곳에서 첨점(cusp)을 이루며 만난다). $t \to 0$일 때 $\rho \to \infty$이며, 이는 곡선이 점근선 쪽으로 평평해지는 것과 들어맞는다.

흔한 실수

- $\ln\tan\frac{1}{2}t$를 미분할 때 연쇄법칙(chain rule)에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 실수. 결과는 반드시 $1/\sin t$가 되어야 한다.
- $\dot{x}$를 $a(-\sin t+\operatorname{cosec} t)$로 둔 채 간단히 하지 않는 실수. $a\cos^2 t/\sin t$ 꼴이 뒤의 모든 소문항을 깔끔하게 만들어 준다.
- 법선 방향을 $(\sin t, -\cos t)$로 잡는 실수. 이 방향은 곡선 아래쪽을 향하므로 C가 잘못된 위치에 놓인다.

STEP 너머

추적선은 x축을 따라 걷는 사람이 길이 a인 줄에 매단 추를 끌고 갈 때 추가 그리는 경로이며, $PQ=a$가 바로 그 성질이다. 점 C는 곡선의 곡률 중심들의 자취(locus)인 **축폐선**(*evolute*)을 그린다. 여기서 $C=(a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t)$는 현수선(catenary) 위에 놓인다는 것이 밝혀진다. 추적선을 점근선을 축으로 회전시키면 의구(pseudosphere)를 얻는데, 이는 일정한 음의 곡률을 가진 곡면으로 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 한 모형이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에는 의구에 대한 아름다운 기하학적 설명이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.