풀이

STEP III 2007, 문제 3

순수수학 • 피보나치 항등식

STEP III 2007, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q3

핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 항등식(identity)은 같은 방법으로 증명한다. 첨자가 가장 큰 항을 골라 점화식(recurrence) $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$를 이용해 쪼개는 것이다. 이를 한 번 하면 (ii)의 식이 모든 첨자가 1씩 줄어든 식으로 바뀌고, 두 번 하면 첨자가 2씩 줄어든 같은 꼴의 식으로 돌아오는데, 이것이 바로 귀납법(induction)에 필요한 것이다. (iv)의 나누어떨어짐(divisibility)에 대해서는 $F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$임에 주목하자. 따라서 F_{2n-1}^2과 F_{2n}^2을 F_{2n+1}로 나눈 나머지(remainder)는 같다.

풀이

소문항 (i)

$F_1 = F_2 = 1$에서 시작하여 이웃한 항을 더해 나가면

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21.$$

소문항 (ii)

모든 항이 정의되도록 $k \geq 1$이라 하자. 첨자가 가장 큰 항 F_{2k+3}을 $F_{2k+2} + F_{2k+1}$로 바꾸면

$$\begin{aligned} F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 &= (F_{2k+2} + F_{2k+1})F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 \\ &= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k+1} - F_{2k+2}) \\ &= F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}, \end{aligned}$$

이다. 점화식에 의해 $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$이기 때문이다. 이것은 $-F_{2k+2}F_{2k} + F_{2k+1}^2$이므로 요구된 결과가 성립한다.

소문항 (iii)

명제 $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$을 $P(n)$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $n = 1$일 때 $F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$이므로 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자. 소문항 (ii)에 의해

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}.$$

> **생각해 보기** 소문항 (ii)는 첨자를 1만큼만 줄였다. 어떻게 하면 $P(k)$까지 완전히 되돌아갈 수 있을까?

같은 방법을 한 번 더 적용하여, 이번에는 첨자가 가장 큰 항을 $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k}$로 쪼개면

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k} &= F_{2k+1}^2 - (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} - F_{2k}) - F_{2k}^2 \\ &= F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$을 이용했다($2k+1 \geq 3$이므로 성립한다). 가정 $P(k)$에 의해 이 값은 1이다. 위의 두 식을 이어 붙이면

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = 1,$$

이고, 이것이 곧 $P(k+1)$이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

결론 이끌어내기. $P(n)$을 정리하면

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1},$$

이고, F_{2n-1}은 정수이므로(점화식에 의해 모든 F_m은 정수이다) $F_{2n}^2 + 1$은 F_{2n+1}로 나누어 떨어진다.

소문항 (iv)

점화식에 의해 $F_{2n-1} = F_{2n+1} - F_{2n}$이다. 양변을 제곱하면

$$F_{2n-1}^2 = F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2,$$

이므로

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n}) + (F_{2n}^2 + 1).$$

첫째 항은 F_{2n+1}의 배수이고(곱해진 인수가 정수이다), $F_{2n}^2 + 1$은 소문항 (iii)에 의해 F_{2n+1}의 배수이다. 따라서 $F_{2n-1}^2 + 1$은 F_{2n+1}로 나누어떨어진다.

사실 몫(quotient)도 구할 수 있다. $F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1}$을 이용하면

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n} + F_{2n-1}) = F_{2n+1}(2F_{2n-1} - F_{2n}),$$

이고, $n \geq 2$일 때 괄호 안은 $F_{2n-1} - F_{2n-2} = F_{2n-3}$이다. 따라서 $F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-3}$이며, 이는 (iii)의 항등식과 아주 가까운 친척이다.

검산

$n = 3$일 때 $F_6^2 + 1 = 65 = 13 \times 5 = F_7F_5$이고, $F_5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2 = F_7F_3$이다. $n = 4$일 때 $F_7^2 + 1 = 170 = 34 \times 5 = F_9F_5$이다. 컴퓨터로 37 이하의 모든 n에 대하여 (ii)와 (iii)의 항등식, 두 나누어떨어짐 명제, 그리고 몫 F_{2n-3}을 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)만으로 귀납법을 시도하는 것: (ii)는 첨자를 1만큼만 줄이므로, 그 결과인 $F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}$는 아직 귀납 가정의 꼴이 아니다. 점화식을 한 번 더 사용해야 한다.
- 기저 단계를 빠뜨리거나, 잘못된 첨자로 확인하는 것($n = 1$에는 F_1, F_2, F_3이 관련된다).

STEP 너머

소문항 (iii)은 카시니 항등식(Cassini's identity) $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$의 절반에 해당하며, 이 항등식은 행렬식(determinant)으로부터 곧바로 얻어진다. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m$의 성분은 F_{m+1}, F_m, F_m, F_{m-1}이고, 그 행렬식은 $(-1)^m$이기 때문이다. (iv)와 같은 나누어떨어짐 성질은 선형 점화식(linear recurrence)의 정수론의 출발점이며, 그곳에서는 합동식(congruence)이 대부분의 일을 해낸다. 정수론에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술), 행렬의 관점에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 다음 단계로 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.