풀이

STEP III 2007, 문제 2

순수수학 • 이항 멱급수

> **STEP III 2007, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q2

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 이항급수(binomial series)에서 출발한다. $(1-4x)^{-1/2}$의 계수(coefficient)를 알고 나면, 급수를 미분하면 인수 n이 내려와 $(n!)^2$이 $n!\,(n-1)!$로 바뀌고, 급수를 적분하면 $n+1$로 나누어져 $(n!)^2$이 $n!\,(n+1)!$로 바뀐다. 따라서 뒤에 나오는 각각의 합은 첫 번째 급수의 도함수 또는 적분을 $|x| < \frac{1}{4}$ 안의 잘 고른 점에서 계산한 값이다.

풀이

소문항 (i)

홀수들의 곱에 빠진 짝수들 $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$을 곱하고 다시 나눈다.

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,(1\cdot 2\cdots n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!},$$

여기서 n개의 짝수 $2k$가 각각 인수 2와 인수 k를 하나씩 내놓기 때문이다.

$|4x| < 1$, 즉 $|x| < \frac{1}{4}$일 때 이항급수에 의해

$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\,(-4x)^n.$$

분자에는 n개의 인수가 있고 모두 음수이므로, 분자는 $(-1)^n\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$과 같다. $(-1)^n$은 $(-4)^n$의 부호와 상쇄되고 $4^n/2^n = 2^n$이므로, 앞의 결과를 이용하면 x^n의 계수는

$$\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} = \frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

이다. 따라서 $|x| < \frac{1}{4}$일 때

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

멱급수(power series)는 수렴 구간(interval of convergence), 여기서는 $|x| < \frac{1}{4}$ 안에서 항별로 미분(term-by-term differentiation)할 수 있다. 양변을 미분하면 좌변은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x)^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}(1-4x)^{-3/2}\cdot(-4) = 2(1-4x)^{-3/2},$$

이고, 우변에서는 상수항이 사라지고 x^n은 nx^{n-1}이 된다. $n/(n!)^2 = 1/(n!\,(n-1)!)$이므로

$$2(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

양변에 x를 곱하면 원하는 거듭제곱 x^n을 얻는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n = \frac{2x}{(1-4x)^{3/2}} \qquad (|x| < \tfrac{1}{4}).$$

이제 $x = \frac{6}{25}$를 대입한다. $\frac{6}{25} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$이므로 대입할 수 있다. 그러면 $1-4x = \frac{1}{25}$이므로 $(1-4x)^{3/2} = \frac{1}{125}$이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{6}{25}\right)^n = 2\cdot\frac{6}{25}\cdot 125 = 60.$$

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 이번에는 계승이 $(n!)^2$이 아니라 $(n+1)!\,n!$이다. 급수에 어떤 연산을 하면 이렇게 될까?

$(n+1)! = (n+1)\,n!$이므로 n번째 계수를 $n+1$로 나누어야 한다. x^n을 적분하면 정확히 이렇게 된다: $\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. 멱급수의 항별 적분 역시 수렴 구간 안에서 성립하므로, $|x| < \frac{1}{4}$일 때 소문항 (i)의 급수를 0부터 x까지 적분한다.

$$\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{2}(1-4t)^{1/2}\right]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

따라서

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

다음으로 구하려는 합의 거듭제곱을 맞춘다. $3^{2n} = 9^n = 9^{n+1}/9$이므로

$$\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} = 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1},$$

이고, 따라서 구하려는 합은 $x = \frac{2}{9}$에서 이 급수의 값의 9배이다. $\frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$이므로 이 값은 허용된다. 이때 $1 - 4x = \frac{1}{9}$이고 $\sqrt{1-4x} = \frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!}{3^{2n}(n+1)!\,n!} &= 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \\ &= 9\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1,\end{aligned}$$

이 되어 증명이 끝난다. 합이 $n = 1$부터 시작하므로 첫 항 x(상수 1의 적분)를 빼야 한다는 점에 주의하라.

검산

- (i)에서 $n = 2$이면 $1 \cdot 3 = 3$이고 $\frac{4!}{2^2\,2!} = 3$이다. 급수는 $1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots$로 시작하며, 제곱해서 확인하면 $(1 + 2x + 6x^2)^2(1 - 4x) = 1 + O(x^3)$으로 일치한다.
- (ii)의 처음 3000개 항을 정확한 분수로 더하면 60.000…이 되고, (iii)의 처음 400개 항을 더하면 기계 정밀도 범위에서 1.000…이 된다.
- (iii)에서 첫 항($n = 1$)은 $\frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9}$로, 이미 전체 합 1의 상당 부분을 차지한다. 그 뒤의 항들은 대략 $(8/9)^n$처럼 줄어든다.

흔한 실수

- 이항계수에서 부호를 놓치는 실수: 분자에 음수 인수가 n개, $(-4)^n$에 n개 있으므로 정확히 상쇄된다.
- $\frac{6}{25}$와 $\frac{2}{9}$가 $|x| < \frac{1}{4}$ 안에 있는지 확인하지 않는 실수: 이 범위 밖에서는 급수가 발산한다.
- (iii)에서 상수 1을 적분하여 생기는 x항을 잊는 실수: 이렇게 하면 답이 1 대신 3이 된다.

STEP 너머

소문항 (iii)에 나오는 수 $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$은 카탈랑 수(Catalan numbers) $1, 1, 2, 5, 14, \ldots$이다. 이 수는 괄호 매기기(bracketings), 이진 트리(binary trees)를 비롯한 여러 구조의 개수를 세며, $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$는 카탈랑 수의 생성함수(generating function)이다. 우리가 증명 없이 사

용한 사실, 즉 멱급수는 수렴 반경(radius of convergence) 안쪽에서 항별로 미분하고 적분할 수 있다는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준 정리이다. Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.