풀이

STEP III 2007, 문제 11

역학 • 모서리를 넘어 구르기

> **STEP III 2007, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q11

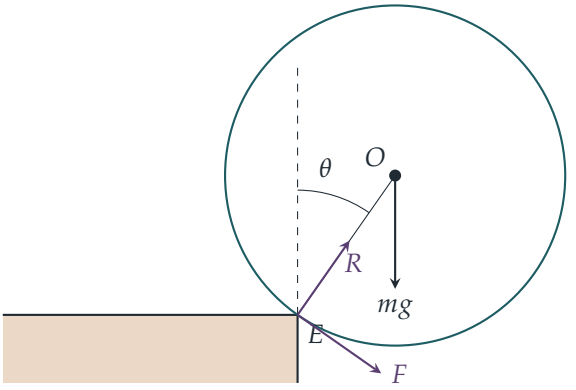
핵심 아이디어

테(rim)가 모서리에 닿으면 모서리는 회전축(pivot) 역할을 한다. 즉 모서리에 닿아 있는 테 위의 점은 정지해 있으므로, 중심은 모서리를 중심으로 반지름 a인 원 위를 움직인다. 모서리에서의 접촉력을 반지름 방향 성분 R(수직항력(normal reaction))와 테를 따르는 성분 F(마찰력(friction))로 나누고, 이를 질량중심(centre of mass)의 운동과 비교한다. 문제 전체는 질량이 어디에 놓여 있느냐에 달려 있다. (i)에서는 질량이 모두 중심에 있으므로, 바퀴는 중심에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)가 없다. (ii)에서는 질량이 테 위에 있으며, 바로 이것이 마찰력을 만들어 낸다.

풀이

모형과 기호. 테, 바큇살, 고리(hoop)는 가볍고 강체(rigid)이며, 허브(hub)와 두 입자는 질점(particle)으로 본다. E를 테와 접촉하는 모서리의 점, O를 중심, θ를 EO가 위쪽 연직 방향과 이루는 각이라 하자. 그러면 바퀴가 모서리에 도착하는 순간 $\theta = 0$이다. 테가 미끄러지지 않고 E와 접촉을 유지하는 동안, E에 있는 테의 물질점은 정지해 있다. 따라서 강체는 각속력 $\dot{\theta}$로 E를 중심으로 회전하고, O는 E를 중심으로 반지름 a인 원 위를 속력 $a\dot{\theta}$로 움직인다.

E에서의 접촉력은 EO 방향(E에서 멀어지는 쪽)의 성분 R와, EO에 수직이며 θ가 증가하는 방향을 양으로 잡은 성분 F를 가진다. E가 정지해 있으므로 접촉력은 일을 하지 않고, 따라서 에너지가 보존된다.



여기서 R는 EO 방향으로 작용하고, F는 양의 방향으로 그려져 있다.

E에서 거리 a에 있는 질량중심 G의 가속도는 운동 방향 성분 $a\ddot{\theta}$와 E를 향하는 성분 $a\dot{\theta}^2$를 가진다. 물체 전체에 작용하는 외력(중력 mg와 접촉력)을 분해하면 다음과 같다.

$$\text{운동 방향:} \quad ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F, \tag{1}$$

$$\text{향하는 점}E: \quad ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R. \tag{2}$$

두 소문항 모두에서 질량중심은 O(허브; 두 입자의 중점)에 있으므로, (1)과 (2)는 양쪽 모두에서 성립한다.

소문항 (i)

탁자 위에서 바퀴는 일정한 속력 u로 움직이므로, $\theta = 0$에서 $\dot{\theta} = u/a$이다. 운동 에너지는 허브의 운동 에너지 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$뿐이고, 허브는 $a(1-\cos\theta)$만큼 내려갔으므로

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ga(1-\cos\theta).$$

이다. 시간에 대해 미분하고 $2a\dot{\theta}$로 약분하면($\dot{\theta} \geq u/a > 0$이므로 이 값은 0이 아니다)

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

를 얻는다. 이를 (1)에 대입하면 $F = 0$이다. 즉 **마찰력은 0이며**, 이것이 보이려던 결과이다.

직접적인 이유도 있다. 테와 바퀏살은 가벼우므로, 이들에 작용하는 힘의 O에 대한 모멘트의 합은 0이어야 한다. 그 힘은 E에서의 접촉력과 O에서 허브가 가하는 힘인데, 후자는 O에 대한 모멘트가 없다. 접촉력의 O에 대한 모멘트는 Fa이므로 $F = 0$이다.

(2)에서 수직항력은

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + 2ga(1-\cos\theta)) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mu^2}{a}.$$

이다. $u^2 < ag$이므로 $\theta = 0$에서 이 값은 $m(g - u^2/a) > 0$이고, 따라서 바퀴는 곧바로 모서리를 떠나지 않는다. 그다음 θ가 증가함에 따라 R는 감소하고, $R = 0$일 때, 즉

$$\cos\theta = \frac{2ag + u^2}{3ag},$$

일 때 테는 접촉을 잃는다. $u^2 < ag$이므로 이 값은 1보다 작다. 이때 허브가 떨어진 높이는

$$a(1 - \cos\theta) = a \cdot \frac{3ag - 2ag - u^2}{3ag} = \frac{ag - u^2}{3g},$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 내내 $F = 0$이므로 미끄러지지 않는다는 가정은 마찰의 도움을 전혀 필요로 하지 않고, 분석은 이 지점까지 그대로 성립한다.

소문항 (ii)

? **생각해 보기** 고리가 E를 중심으로 회전하는 동안 두 입자는 어디에 있는가?

$\theta = 0$에서 두 입자를 지나는 지름은 연직이므로, 아래쪽 입자는 접촉점 E에 있다. 이후 고리는 E에 있는 물질점, 즉 그 입자를 중심으로 강체 회전하므로 그 입자는 계속 E에 머문다. 다른 입자는 지름의 반대쪽, 곧 EO를 따라 E에서 거리 $2a$인 곳에 머문다.

따라서 E에 대한 관성 모멘트는 $\frac{m}{2}(2a)^2 = 2ma^2$이다. 탁자 위에서 고리는 일정한 속력 u로 구르므로(어떤 힘도 일을 하지 않는다), $\theta = 0$에서 $\dot\theta = u/a$이다. 움직이는 입자는 E보다 $2a\cos\theta$만큼 높은 곳에 있고, 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2 + \tfrac{m}{2}g(2a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\frac{u^2}{a^2} + \tfrac{m}{2}g(2a), \qquad \text{따라서} \qquad a^2\dot\theta^2 = u^2 + ga(1 - \cos\theta).$$

이다. 미분하고 $2a\dot\theta \neq 0$으로 약분하면 $a\ddot\theta = \frac{1}{2}g\sin\theta$를 얻는다. 그러면 (1)에서

$$F = ma\ddot\theta - mg\sin\theta = -\tfrac{1}{2}mg\sin\theta.$$

이다. 따라서 모든 $\theta > 0$에 대해 **마찰력은 0이 아니다**. (그 크기는 $\frac{1}{2}mg\sin\theta$이고, O의 운동 방향과 반대로 작용한다.) (i)과 달리 이제는 테가 질량을 가지므로, 고리의 회전이 O의 운동과 보조를 맞추려면 O에 대한 토크(torque)가 필요하며, 이를 공급할 수 있는 것은 마찰력뿐이다.

(2)에서

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + ga(1 - \cos\theta)) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mu^2}{a}.$$

이다. $\theta = 0$에서 $R = m(g - u^2/a) > 0$이고 $F = 0$이므로, 모서리를 넘어가는 운동은 미끄러짐 없이 시작된다. 고리가 미끄러지지 않고 접촉을 유지한다면, R는

$$\cos\theta_1 = \frac{ag + u^2}{2ag} < 1,$$

에서 o으로 떨어질 것이다(여기서 $u^2 < ag$를 이용하였다). 따라서 $\theta_1 > 0$이고, 그곳에서 $|F| = \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 이 때문에 접촉을 잃기 전에 반드시 미끄러지게 되는가?

마찰계수(coefficient of friction)가 μ일 때, 미끄러지지 않으려면 $|F| \le \mu R$이어야 한다. 아래쪽에서 $\theta \to \theta_1$일 때 $R \to 0^+$이지만 $|F| \to \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$이므로 $|F|/R \to \infty$이다. 그러므로 μ의 (유한한) 값이 무엇이든, R가 아직 양수인 동안 $|F|$가 μR보다 커야만 하는 각 $\theta < \theta_1$이 존재한다. 따라서 고리는 탁자와의 **접촉을 잃기 전에 미끄러진다**.

검산

- (i)에서 $u^2 \to ag$이면 낙하 거리는 0으로 수렴한다. 이때 허브는 $\theta = 0$에서 막 튀어 오르려는 상태이며, 그곳에서 $g = u^2/a$이다. $u \to 0$이면 낙하 거리는 $a/3$이며, 이는 매끄러운 구의 꼭대기에서 정지 상태로 출발해 미끄러져 내려오는 입자에 대한 익숙한 결과이다.
- $a = 1\,\mathrm{m}$, $u = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$으로 방정식을 수치적으로 단계별 계산하면 (i)에서 낙하 거리 0.1974 m을 얻으며, 이는 $(ag - u^2)/(3g)$와 일치한다. (ii)에서는 $\cos\theta_1 = 0.7039$를 얻었고, $R = 0$ 직전에 $|F|/R$가 10^4를 넘었다.
- (ii)에서 접촉력을 두 입자의 가속도로부터 직접 계산하면($m\ddot{\mathbf{r}}_G$에서 중력을 뺀 것) F와 R가 모두 그대로 재현된다.

흔한 실수

- (ii)에서 O에 대한 구름 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$를 사용하면서, 일단 모서리를 축으로 회전하기 시작하면 한 입자가 E에 고정된다는 사실을 잊는 것. E에 대해 계산하는 편이 더 깔끔하다.
- 모서리에서 힘을 수평과 연직 방향으로 분해하는 것. 모서리에서 "수직" 방향은 연직이 아니라 반지름 EO 방향이다.
- 단지 $F \neq 0$이라는 이유만으로 "미끄러진다"고 결론 내리는 것. 이 논증에는 $|F|$가 o에서 멀리 떨어져 있는 동안 $R \to 0$이 된다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

두 소문항의 대비는 질량 분포에 관한 것이다. 같은 질량중심 운동이라도 관성 모멘트에 따라 서로 다른 접촉력이 필요한데, 각운동량 방정식과 선운동량 방정식을 모두 만족해야

하기 때문이다. 대학의 첫 역학 과목에서 이 내용은 강체 동역학(rigid-body dynamics)으로 이어진다. 여기서 물체의 운동은 $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$와 G에 대한 토크 방정식으로 결정되며, 접촉 제약(구름, 미끄러짐, 접촉 상실)은 부등식 $R \geq 0$과 $|F| \leq \mu R$로 확인한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 방정식을 모두 철저하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.