풀이

STEP III 2007, 문제 10

역학 • 경사면 위의 포물체 운동

STEP III 2007, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q10

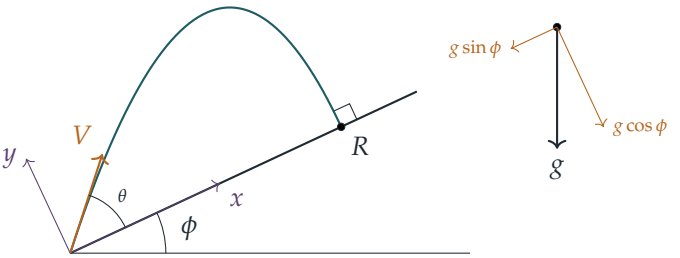
핵심 아이디어

경사면에 나란한 축과 수직인 축을 잡으면, 중력은 두 개의 일정한 가속도, 즉 경사면 아래 방향의 $g\sin\phi$와 경사면 안쪽 방향의 $g\cos\phi$로 나뉜다. 눈에 띄는 조건은 입자가 자신의 경로를 그대로 되짚어 돌아온다는 것이다. 매끄러운(smooth) 평면은 자신에 수직인 방향으로만 밀 수 있으므로, 입자가 평면에 정면으로(수직으로) 부딪칠 때에만 속도를 정반대로 뒤집을 수 있다. 이 한 가지 사실에서 두 결과가 모두 나오고, 나머지는 대수 계산과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 이용한 최솟값 구하기이다.

풀이

운동 방정식

입자를 공기 저항 없이 중력만 받아 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. 무게 mg는 연직 아래 방향으로 작용한다. 이를 경사면 방향과 경사면에 수직인 방향으로 분해(resolving)하면



가속도는 x 방향으로 $-g\sin\phi$, y 방향으로 $-g\cos\phi$이고, 둘 다 일정하다. 주어진 처음 속도와 출발점 $(0,0)$을 이용해 두 번 적분하면

$$x = Vt\cos\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\phi, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\phi.$$

경로를 되짚어 오기 위한 조건

입자는 $t > 0$에서 $y = 0$이 될 때 처음으로 평면에 돌아온다. 즉

$$t = T = \frac{2V\sin\theta}{g\cos\phi}.$$

일 때이다.

> **생각해 보기** "같은 경로를 따라 되돌아온다"는 것은 충돌에 대해 무엇을 알려 주는가?

튀어 오른 뒤에도 입자는 다시 일정한 중력만 받아 움직인다. 입자가 같은 포물선을 따라 원점까지 되돌아가려면, 튀어 오른 직후의 속도가 튀기 직전 속도의 정확히 반대여야 한다. (필름을 거꾸로 돌린다고 생각해 보라.) 평면이 매끄럽다고 가정하므로, 평면이 입자에 주는 충격량(impulse)은 평면에 수직이다. 따라서 경사면 방향의 성분(component) $\dot{x}$는 튀어 오를 때 변하지 않는다. 이 성분이 반대로 바뀔 수 있는 것은 그 값이 0일 때뿐이다. 그러므로 입자는 평면에 수직으로 부딪쳐야 하며, $t = T$에서 $\dot{x} = 0$이다. (또한 튀어 오를 때 속력의 손실 없이 $\dot{y}$가 반대로 바뀌어야 하므로, 충돌은 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌이어야 한다. 문제에서는 이를 당연한 것으로 가정한다.)

이제 $\dot{x} = V\cos\theta - gt\sin\phi$이므로, $\dot{x}(T) = 0$에서

$$V\cos\theta = gT\sin\phi = \frac{2V\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}.$$

를 얻는다. $0 < \theta < \pi/2$이므로 양수인 $V\cos\theta$로 양변을 나누면

$$2\tan\phi\tan\theta = 1,$$

이 되어 요구된 결과가 나온다.

사거리

$\dot{x}(T) = 0$에서 더 깔끔한 꼴 $T = \dfrac{V\cos\theta}{g\sin\phi}$를 얻는다. 그러면

$$\begin{aligned} R = x(T) &= V\cos\theta\cdot\frac{V\cos\theta}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\sin\phi\cdot\frac{V^2\cos^2\theta}{g^2\sin^2\phi} \\ &= \frac{V^2\cos^2\theta}{g\sin\phi} - \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi} = \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. (같은 말로, x는 $\dot{x} = 0$일 때 가장 크므로, 착지점은 이 운동이 경사면 위쪽으로 도달할 수 있는 가장 높은 지점이다.)

$2V^2/(gR)$에 대한 항등식

사거리(range)의 식에서

$$\frac{2V^2}{gR} = \frac{4\sin\phi}{\cos^2\theta} = 4\sin\phi\,(1+\tan^2\theta).$$

이다. $\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\phi}$, 따라서 $\tan^2\theta = \dfrac{\cos^2\phi}{4\sin^2\phi}$임을 이용하면

$$\frac{2V^2}{gR} = 4\sin\phi + \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} = 4\sin\phi + \frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi} = 3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi.$$

최대 사거리

주어진 V에 대하여, R은 $3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi$가 가장 작을 때 가장 크다. $s = \sin\phi$라 하자. $0 < \phi < \pi/2$이므로 $0 < s < 1$이다. 양수 $3s$와 $1/s$에 산술-기하 평균 부등식을 적용하면

$$3s + \frac{1}{s} \geq 2\sqrt{3s \cdot \frac{1}{s}} = 2\sqrt{3},$$

이고, 등호는 정확히 $3s = 1/s$, 즉 $s = 1/\sqrt{3}$일 때 성립한다. 이 값은 실제로 $(0,1)$에 속하므로, 이 하한은 실제 경사면에서 달성된다. 따라서

$$\frac{2V^2}{gR} \geq 2\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad R \leq \frac{V^2}{\sqrt{3}\,g},$$

이고, 등호는 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$일 때 성립한다. 그러므로 가능한 최대 사거리는 $V^2/(\sqrt{3}\,g)$이다.

> ? **생각해 보기** 최대일 때 조건 $\phi + \theta < \pi/2$가 만족되는가?

그렇다. 사실은 항상 만족된다. $\tan\theta\tan\phi = \frac{1}{2}$이고 두 각이 모두 예각이므로

$$\tan(\phi+\theta) = \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta} = 2(\tan\phi + \tan\theta) > 0,$$

이고, $0 < \phi + \theta < \pi$이므로 반드시 $\phi + \theta < \pi/2$이다. 최대일 때 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$이면 $\tan\phi = 1/\sqrt{2}$이므로 $\tan\theta = 1/\sqrt{2}$도 성립한다. 즉 최선의 경우는 $\theta = \phi \approx 35.3^\circ$이다.

검산

▶ 단위: V^2/g는 길이이며, 사거리라면 마땅히 그래야 한다.

- 극한: $\phi \to 0$이면 $\operatorname{cosec}\phi \to \infty$이고 $R \to 0$이다. 거의 평평한 평면에서 수직으로 착지하는 유일한 방법은 거의 똑바로 위로 쏘는 것이고, 그러면 사거리는 거의 없다. $\phi \to \pi/2$이면 평면은 연직인 벽이 되고 $\theta \to 0, 2V^2/(gR) \to 4$이므로 $R \to V^2/(2g)$이다. 이는 벽을 따라 똑바로 위로 던진 입자가 도달하는 높이이다. 두 경우 모두 타당하다.
- 수치적으로, $g = 9.8$, $V = 10$, $\phi = 0.7$로 놓고 운동을 시간 단계별로 진행시키면 $x \approx 5.8561$에 착지하여 공식과 일치한다. 착지 속도는 $\dot{x} \approx 0$이고, 이 속도를 반대로 하면 입자는 원점으로 돌아온다. ϕ에 대한 격자 탐색을 하면 $V = 1$일 때 최대 $R \approx 0.05891$을 얻는데, 이는 $1/(9.8\sqrt{3})$과 같다.

흔한 실수

- 중력을 반대로 분해하는 실수. 경사면 **방향** 성분은 $g\sin\phi$이고, 경사면에 **수직인** 성분은 $g\cos\phi$이다. $\phi = 0$을 넣어 확인해 보라.
- 입자가 "수평으로" 또는 "가장 높은 지점에서" 착지해야 한다고 말하는 실수. 조건은 입자가 **평면**에 수직으로 부딪치는 것, 즉 기울어진 축에서 $\dot{x} = 0$이라는 것이다.
- $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$이 실제로 가능한 값인지 확인하지 않는 실수. 산술-기하 평균 부등식은 하나의 한계를 줄 뿐이며, 등호가 실제로 성립할 수 있을 때에만 그것이 최댓값이 된다.

STEP 너머

경로를 되짚어 오는 현상은 뉴턴 역학의 **시간 가역성**(time-reversibility)에 바탕을 둔다. 위치에만 의존하는 힘에 대해서는, 모든 속도를 반대로 하면 계가 자신이 지나온 역사를 거슬러 되돌아간다. 기본으로 쓰는 수평·연직 축 대신 기하적 상황에 맞춘 축을 고르는 것은 대학 역학에서 끊임없이 쓰게 될 습관이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 가지 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.