풀이

STEP III 2007, 문제 1

순수수학 • 탄젠트의 합과 비에트 정리

STEP III 2007, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q1

핵심 아이디어

여러 각의 합의 탄젠트는 각 탄젠트들의 대칭함수(symmetric function)의 비로 나타나고, 다항식(polynomial)의 근(root)들의 대칭함수는 비에트(Vieta) 공식(Vieta's formulae)이 계수(coefficient)로 정확히 알려 주는 양이다. 마지막 부분의 요령은 삼각방정식을 $t = \tan\theta$에 대한 사차방정식(quartic)으로 바꾸는 것이다. 그러면 그 계수들의 대칭성 때문에 합의 탄젠트가 반드시 0이 된다.

풀이

네 각의 합의 탄젠트

합을 $A = \theta_1 + \theta_2$, $B = \theta_3 + \theta_4$로 두어 $A + B$로 나누면

$$\tan A = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}, \qquad \tan B = \frac{t_3 + t_4}{1 - t_3 t_4}.$$

이제 $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$의 분자와 분모에 $(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4)$를 곱하면

$$\tan(A+B) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_3 t_4) + (t_3 + t_4)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4) - (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)}.$$

분자는 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4)$이고, 분모는 $1 - t_1 t_2 - t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_4 - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4)$이다. 기본대칭함수(elementary symmetric function)를

$$\sigma_1 = \sum t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k, \quad \sigma_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

로 쓰면, 이는

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{1-\sigma_2+\sigma_4}.}$$

(두 각이나 세 각일 때와 같은 규칙이다. 분자에는 홀수 차수 대칭함수가 부호를 번갈아 가며, 분모에는 짝수 차수 대칭함수가 놓인다.)

계수로 나타내기

$t_1,\dots,t_4$가 $at^4+bt^3+ct^2+dt+e=0$의 근이면 $at^4+bt^3+ct^2+dt+e=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$이고, 계수를 비교하면 (비에트 공식)

$$\sigma_1=-\frac{b}{a},\qquad \sigma_2=\frac{c}{a},\qquad \sigma_3=-\frac{d}{a},\qquad \sigma_4=\frac{e}{a}.$$

이를 대입하고 분자와 분모에 $a\neq 0$을 곱하면

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{d-b}{a-c+e}.}$$

마지막 부분

$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$이므로 방정식은

$$2p\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=0.$$

$\cos^2\theta$로 나누면($\cos\theta=0$인 특수한 경우는 제외한다)

$$2p=-(\cos\alpha+t\sin\alpha)\sec\theta,\qquad t=\tan\theta.$$

$\sec\theta$는 t의 유리함수(rational function)가 아니므로, $\sec^2\theta=1+t^2$을 이용하여 양변을 제곱한다.

$$4p^2=(\cos\alpha+t\sin\alpha)^2(1+t^2).$$

전개하면

$$\sin^2\alpha\,t^4+2\sin\alpha\cos\alpha\,t^3+t^2+2\sin\alpha\cos\alpha\,t+(\cos^2\alpha-4p^2)=0, \qquad (*)$$

이때 t^2의 계수에는 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$을 사용하였다.

> ? **생각해 보기** 제곱하면 불필요한 해가 생길 수 있다. $\tan\theta_i$들이 정말로 $(*)$의 네 근인가?

제곱했으므로 $(*)$는 $p\cos 2\theta-\cos(\theta-\alpha)+p=0$의 해들도 만족한다. 그런데 θ를 $\theta+\pi$로 바꾸면 $t=\tan\theta$와 $\cos^2\theta$는 변하지 않고 $\cos(\theta-\alpha)$의 부호만 바뀐다. 따라서 $(*)$의 각 실근 t에 대하여, $[0,2\pi)$에서 탄젠트가 t인 두 각 가운데 정확히 하나만 원래 방정식을 만족한

다(둘 다 만족하려면 $\cos(\theta-\alpha)=0$이어야 하고, 그러면 $p\cos^2\theta=0$이 되어 특수한 경우가 된다). 그러므로 $[0,2\pi)$에서의 해는 $(*)$의 실근과 일대일로 대응하고, 주어진 네 각의 탄젠트는 $(*)$의 네 근이다.

이제 앞의 결과를 $a=\sin^2\alpha$, $b=d=2\sin\alpha\cos\alpha$, $c=1$, $e=\cos^2\alpha-4p^2$로 두고 적용한다 ($a\neq 0$, 즉 $\sin\alpha\neq 0$이어야 한다. 그렇지 않으면 $(*)$는 사차방정식이 아니며, 이것도 특수한 경우이다). 분자는 $d-b=0$이고, 분모는

$$a-c+e=\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha-4p^2=-4p^2,$$

로 0이 아니다($p=0$이면 방정식은 단순히 $\cos(\theta-\alpha)=0$이 되어 해가 두 개뿐이다). 따라서

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0,$$

이므로 어떤 정수 n에 대하여 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=n\pi$이고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- 네 각의 공식에 $t_3=t_4=0$을 넣으면 $(t_1+t_2)/(1-t_1t_2)$가 되어 익숙한 두 각의 공식으로 돌아간다.
- $p=\frac{1}{2}$, $\alpha=3$일 때 방정식을 $[0,2\pi)$에서 수치적으로 풀면 네 근이 나오고, 그 합을 π로 나눈 값은 10^{-9} 이내의 오차로 정수이다. (모든 p와 α에 대해 해가 네 개인 것은 아니다. $p=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$이면 해가 두 개뿐이다.) 해가 네 개였던 임의의 (p,α)들을 시험해 보았을 때 모두 같은 결과가 성립하였고, 두 공식 역시 수천 개의 임의의 각과 사차식으로 확인하였다.

흔한 실수

- 비에트 공식에서의 부호 실수: 하나 걸러 나오는 계수 b와 d에는 음의 부호가 붙는다.
- 제곱하지 않고 $\cos(\theta-\alpha)$를 곧바로 $\tan\theta$로 나타내려 하거나, 제곱한 뒤 원치 않는 각이 끼어들지 않았는지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

합의 tan를 기본대칭함수로 나타내는 것은 근들에 대한 모든 대칭다항식은 계수들의 다항식이라는 큰 정리의 한 예이다. 이는 복소수로도 깔끔하게 설명된다. $\prod(1+\mathrm{i}t_k)=\prod\sec\theta_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_k}$이고, 그 실수부와 허수부가 각각 $1-\sigma_2+\sigma_4$와 $\sigma_1-\sigma_3$이기 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 기하학적 사고방식

을 발전시키고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 같은 정신의 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.