풀이

# STEP II 2007, 문제 9

역학 • 반발 계수가 있는 비스듬한 충돌

> **STEP II 2007, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q9

## 핵심 아이디어

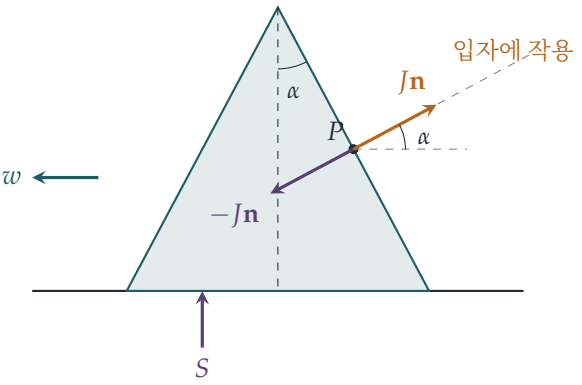
모든 면이 매끄러우므로(smooth) 입자와 원뿔(cone) 사이에 작용하는 충격량(impulse)은 충돌 지점에서의 공통 법선(common normal) 방향으로만 작용하고, 탁자는 연직 방향으로만 밀 수 있다. 이로부터 두 가지를 한꺼번에 알 수 있다. 하나는 면을 **따르는** 방향의 입자 속도가 변하지 않는다는 것이고, 다른 하나는 입자와 원뿔을 합친 계의 수평 방향 운동량이 보존된다는 것(운동량 보존, conservation of momentum)이다. 여기에 법선 방향의 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)을 결합하면 원뿔의 속력이 바로 나온다. 소문항 (ii)는 떨어지는 입자 속도의 법선 성분에 소문항 (i)을 적용한 것이다.

## 풀이

입자는 점으로, 원뿔은 (문제에서 주어진 대로) 회전하지도 않고 연직으로 움직이지도 않는 강체(rigid body)로 모형화한다. 따라서 충돌 직후 원뿔은 어떤 속력 $w$로 수평으로 미끄러진다. 원뿔의 축과 충돌 지점 $P$를 지나는 연직 평면에서 생각한다. $P$를 지나는 모선(generator)이 연직축과 이루는 각이 $\alpha$이므로, $P$에서의 바깥쪽 법선은 **수평선**과 각 $\alpha$를 이룬다. 다음 단위 벡터(unit vector)를 잡는다.

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ \text{(바깥쪽 법선)}, \qquad \mathbf{t} = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\ \text{(빗면 아래 방향)},$$

여기서 첫째 좌표는 (축에서 멀어지는) 수평 방향이고 둘째 좌표는 연직 위쪽 방향이다.




입자가 받는 충격량을 $J\mathbf{n}$ $(J>0)$이라 하면 원뿔은 $-J\mathbf{n}$을 받고, 그 수평 성분은 $P$에서 멀어지는 방향으로 크기가 $J\cos\alpha$이다. 탁자는 위쪽으로 연직 충격량 $S = J\sin\alpha$를 주는데, 이는 $-J\mathbf{n}$의 아래쪽 성분을 정확히 상쇄하는 데 필요한 양이다. 원뿔이 연직 속도를 갖지 않는 것은 이 때문이다. 따라서

$$Mw = J\cos\alpha, \tag{1}$$

이고, 원뿔은 $P$에서 멀어지는 방향으로 수평 운동한다.

### 소문항 (i)

입자는 속도 $-u\mathbf{n}$으로 도착하며, 이 속도는 $\mathbf{t}$ 방향 성분이 없다. 면이 매끄러우므로 입자가 받는 충격량은 순전히 $\mathbf{n}$ 방향이고, $\mathbf{t}$ 방향 성분을 바꿀 수 없다. 따라서 충돌 후에도 그 성분은 여전히 0이고, 입자의 속도는 $\mathbf{n}$의 상수배이다. 즉 입자는 $P$에서의 법선을 따라 움직인다(바깥쪽으로 움직이거나, 원뿔이 충분히 빨리 달아나는 경우에는 여전히 안쪽으로 움직이되 더 느리게 움직인다).

충돌 후 입자의 속도는 $(-u + J/m)\,\mathbf{n}$이다. 원뿔은 $P$에서 멀어지는 방향(그림에서 왼쪽)으로 속력 $w$로 수평 운동하므로, 그 속도는 $(-w, 0)$이고 이것의 $\mathbf{n}$ 방향 성분은 $-w\cos\alpha$이다.

> **생각해 보기** 뉴턴의 반발 법칙은 어느 방향의 상대 속도를 비교하는가? 그리고 원뿔은 여기에 어떻게 기여하는가?

반발은 공통 법선 $\mathbf{n}$ 방향으로 작용한다. 충돌 전 $\mathbf{n}$ 방향의 접근 속력은 $u$이다(원뿔은 정지해 있다). 충돌 후 분리 속력은 입자의 $\mathbf{n}$-성분에서 원뿔의 성분을 뺀 것이다.

$$\left(-u + \frac{J}{m}\right) - (-w\cos\alpha) = eu \quad\Longrightarrow\quad J = m\big((1+e)u - w\cos\alpha\big).$$

이를 (1)에 대입하면

$$Mw = m\cos\alpha\,\big((1+e)u - w\cos\alpha\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{w = \frac{m(1+e)u\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}}.$$

같은 이야기를 수평 방향 운동량 보존으로도 할 수 있다(탁자의 충격량은 연직 방향이다). $m(-u\cos\alpha) = m\left(-u + \frac{J}{m}\right)\cos\alpha - Mw$이고, 이는 다시 (1)이다.

### 소문항 (ii)

이제 입자는 속도 $(0, -u)$로 도착한다. 이를 분해하면

$$(0,-u)\cdot\mathbf{n} = -u\sin\alpha, \qquad (0,-u)\cdot\mathbf{t} = u\cos\alpha.$$

접선 성분(tangential component) $u\cos\alpha$는 충돌의 영향을 받지 않으며(역시 면이 매끄럽기 때문이다) 이후 아무 역할도 하지 않는다. 충격량 $J\mathbf{n}$, 식 (1), 반발 법칙의 식은 모두 법선 성분만 포함한다. 따라서 소문항 (i)의 풀이를 법선 방향 접근 속력 $u$를 $u\sin\alpha$로 바꾸어 그대로 적용하면

$$w = \frac{m(1+e)(u\sin\alpha)\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha} = \frac{mu(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha},$$

이므로 요구된 결과가 나온다.

**$\alpha$에 대한 최대화.** $M, m, e, u$가 고정되어 있을 때 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$를 최대화해야 한다.

> **생각해 보기** 이 분수식을 미분하는 것은 번거롭다. 식을 깔끔하게 만드는 치환이 있을까?

분자와 분모를 $\cos^2\alpha$로 나누고 $\sec^2\alpha = 1 + T^2$를 이용하여 $T = \tan\alpha > 0$으로 놓으면

$$f = \frac{\tan\alpha}{M\sec^2\alpha + m} = \frac{T}{MT^2 + (M+m)} = \frac{1}{MT + \dfrac{M+m}{T}}.$$

산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해(두 항은 모두 양수이다)

$$MT + \frac{M+m}{T} \geq 2\sqrt{M(M+m)},$$

이고, 등호는 정확히 $MT = (M+m)/T$, 즉 $T^2 = (M+m)/M$일 때 성립한다. 따라서 $f$, 그리고 $w$는 이때 최대이다. $T \mapsto \alpha$는 $(0,\infty)$에서 $(0, \frac{\pi}{2})$로의 전단사(bijection)이므로 이것이 유일한 최댓값이고,

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{M+m}{M}} = \frac{M}{2M+m}, \qquad \text{따라서} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{2M+m}}$$

이다($\alpha$가 예각이므로 양의 제곱근을 택한다). 최대 속력은 $w_{\max} = \dfrac{mu(1+e)}{2\sqrt{M(M+m)}}$이다.

## 검산

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$이면 원뿔은 평평한 원판이 된다. 연직으로 떨어지는 입자는 수평으로 밀어 주지 못하므로 $w \to 0$이다. 소문항 (i)에서 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$이면 법선이 연직 방향이 되고, 이때도 $w \to 0$이다. 잘 맞는다.
- 소문항 (i)에서 $\alpha \to 0$(연직 벽)이면 $w = \dfrac{m(1+e)u}{M+m}$을 얻는데, 이는 질량 $M$인 자유로운 블록과의 정면충돌에서 익숙하게 보는 답이다.
- $m \ll M$이면 최적의 각은 $\cos^2\alpha \to \frac{1}{2}$, 즉 $\alpha = 45°$이고, 이는 $\sin\alpha\cos\alpha$가 최대가 되는 각이다.
- 수치로 확인하면, $M = 3, m = 1, e = \frac{1}{2}, u = 4, \alpha = \frac{\pi}{6}$일 때 소문항 (ii)는 $w = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.693$을 준다. 충격량을 직접 계산하는 방법(반발 법칙에서 $J$를 구하는 방법)도 임의의 매개변수에 대해 두 공식과 일치하며, $\alpha$에 대한 격자 탐색으로도 최대가 되는 각이 확인된다.

## 흔한 실수

- 원뿔이 움직인다는 사실을 잊고, 분리 속력이 그냥 입자의 속력 $eu$인 것처럼 반발 법칙의 식을 쓰는 것. 원뿔의 속도는 법선 방향으로 성분 $w\cos\alpha$를 갖는다.
- 법선 방향으로 운동량을 보존시키는 것. 탁자의 충격량은 **n** 방향 성분을 가지므로 **수평 방향** 운동량만 보존된다.
- 법선이 연직선과 각 $\alpha$를 이룬다고 보는 것. 연직선과 각 $\alpha$를 이루는 것은 면이므로, 법선은 수평선과 각 $\alpha$를 이룬다.

## STEP 너머

여기서 탁자는 **구속**(constraint)으로 작용한다. 탁자는 원뿔에서 자유도(degree of freedom) 하나를 없애며, 그 충격량은 이 구속을 지키는 데 필요한 만큼의 크기를 갖는다. 대학에서는 이것이 충격 구속(impulsive constraint) 이론이 되는데, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 일반화 좌표(generalised coordinates)를 이용하면 깔끔하게 다룰 수 있다. 또한 법선 방향으로의 사영은 구속된 물체의 유효 질량(effective mass)이라는 개념 뒤에 있는 것과 같은 아이디어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 2차원에서의 충돌과 충격량을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.