풀이

STEP II 2007, 문제 8

순수수학 • 벡터를 이용한 체바 정리

> **STEP II 2007, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q8

핵심 아이디어

평면 위의 모든 점은 $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 꼴로 쓸 수 있고, (i)은 이런 점이 언제 BC 위에 있는지를 정확히 알려 준다. 계수의 합이 1일 때이다. 따라서 어떤 직선이 BC(또는 CA, AB)와 만나는 점을 구하려면, 그 직선 위의 일반적인 점을 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$로 나타낸 다음 계수에 알맞은 조건을 걸면 된다. 그러면 각 비가 β와 γ로 표현되고, 곱은 깔끔하게 약분된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $BD : DC$와 같은 비는 **부호 있는 비**(signed ratio)를 뜻한다. 즉 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$이면 $BD/DC = k$이고, D가 선분 BC 바깥에 있으면 이 값은 음수이다. A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로(non-collinear) $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$는 평행하지 않고 영벡터도 아니다. 따라서 계수를 비교할 수 있다. 즉 $p\mathbf{b} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{b} + q'\mathbf{c}$이면 반드시 $p = p'$이고 $q = q'$이다.

소문항 (i)

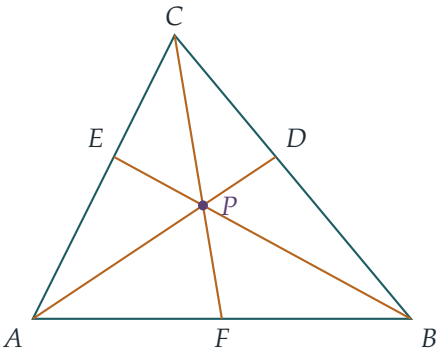
$s + t = 1$이면

$$s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = (1 - t)\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{b} + t(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$

이고, 이것은 t를 매개변수(parameter)로 하여 B를 지나고 방향이 $\overrightarrow{BC}$인 직선의 벡터 방정식(vector equation)이다. t가 모든 실수를 움직이면 X는 이 직선 전체를 덮는다. 따라서 X의 자취(locus)는 B와 C를 지나는 (무한히 뻗은) 직선이며, 선분 BC는 그중 $0 \le t \le 1$인 부분이다.

거꾸로, 계수를 비교하면 점 $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$가 직선 BC 위에 있을 필요충분조건은 $\beta + \gamma = 1$이다. 앞으로는 이 판정법을 사용한다. 특히 $\beta + \gamma \neq 1$은 P가 BC 위에 있지 않다는 뜻이고,

$\beta, \gamma \neq 0$은 P가 CA나 AB 위에 있지 않다는 뜻이다.



소문항 (ii)

직선 AP 위의 일반적인 점은 $\lambda(\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \lambda\beta\,\mathbf{b} + \lambda\gamma\,\mathbf{c}$이다. (i)에 의해 이 점이 BC 위에 있을 필요충분조건은 $\lambda\beta + \lambda\gamma = 1$, 즉

$$\lambda = \frac{1}{\beta + \gamma}.$$

이다. (여기에는 $\beta + \gamma \neq 0$이 필요하다. $\beta + \gamma = 0$이면 $\overrightarrow{AP} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{c})$가 BC와 평행하여 D가 존재하지 않으므로, 문제는 암묵적으로 $\beta + \gamma \neq 0$을 가정하고 있다.) 따라서

$$\mathbf{d} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma}.$$

이제

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{d} - \mathbf{b} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} - (\beta + \gamma)\mathbf{b}}{\beta + \gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$
$$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \frac{(\beta + \gamma)\mathbf{c} - \beta\mathbf{b} - \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma} = \frac{\beta}{\beta + \gamma}(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

두 벡터 모두 같은 벡터 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$의 상수배이므로 $\beta\overrightarrow{BD} = \gamma\overrightarrow{DC}$이고, $\beta \neq 0$이므로

$$BD : DC = \gamma : \beta,$$

이다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (iii)

E와 F도 같은 방법으로 구한다. 다만 이번에는 목표 직선이 CA($\mathbf{c}$의 상수배)와 AB($\mathbf{b}$의 상수배)이다.

? **생각해 보기** 점 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$가 직선 CA 위에 있는지는 어떻게 판단할까?

직선 CA는 원점 A를 지나고 방향이 $\mathbf{c}$이므로, 그 위의 점은 정확히 $\mathbf{c}$의 상수배들이다. 즉 $\mathbf{b}$의 계수가 0이어야 한다. 마찬가지로 어떤 점이 AB 위에 있을 필요충분조건은 $\mathbf{c}$의 계수가 0인 것이다.

E 구하기. 직선 BP 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b}+\mu(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-\mathbf{b})=(1-\mu(1-\beta))\mathbf{b}+\mu\gamma\,\mathbf{c}.$$

이다. $\mathbf{b}$의 계수를 0으로 두면 $\mu=1/(1-\beta)$를 얻는다($\beta\neq 1$이어야 한다. $\beta=1$이면 $\overrightarrow{BP}=\gamma\mathbf{c}$가 CA와 평행하여 E가 존재하지 않는다). 따라서

$$\mathbf{e}=e\,\mathbf{c},\qquad e=\frac{\gamma}{1-\beta}.$$

그러면 $\overrightarrow{CE}=(e-1)\mathbf{c}$, $\overrightarrow{EA}=-e\,\mathbf{c}$이고, $\gamma\neq 0$이므로 $e\neq 0$이다. 따라서

$$\frac{CE}{EA}=\frac{e-1}{-e}=\frac{1-e}{e}=\frac{(1-\beta-\gamma)/(1-\beta)}{\gamma/(1-\beta)}=\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

F 구하기. B와 C의 역할을 바꾸면(즉 $\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{c}$, $\beta\leftrightarrow\gamma$로 바꾸면), $\gamma\neq 1$이라는 가정 아래 직선 CP는 AB와 $\mathbf{f}=f\,\mathbf{b}$에서 만나고 $f=\beta/(1-\gamma)$이다. 그러면 $\overrightarrow{AF}=f\,\mathbf{b}$, $\overrightarrow{FB}=(1-f)\mathbf{b}$이며, $\beta+\gamma\neq 1$이므로 $1-f=(1-\beta-\gamma)/(1-\gamma)\neq 0$이다. 따라서

$$\frac{AF}{FB}=\frac{f}{1-f}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}.$$

곱. 가운데 인수에 (ii)를 이용하면

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}\times\frac{\gamma}{\beta}\times\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}=1,$$

이고, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, $\beta+\gamma\neq 1$이므로 약분된 인수는 모두 0이 아니다. 이것이 구하려던 결과이다. (이 식은 부호 있는 비에 대해 성립하므로, 길이 자체에 대해서도 성립한다.)

검산

- 무게중심(centroid): $\beta=\gamma=\frac{1}{3}$이면 P는 무게중심이다. 이때 $BD:DC=1:1$, $CE/EA=\frac{1/3}{1/3}=1$, $AF/FB=1$이므로 세 체바 선분(cevian)은 모두 중선(median)이 되고, 마땅히 그래야 한다.
- $A=(0,0)$, $B=(4,0)$, $C=(1.5,3)$, $\beta=0.3$, $\gamma=0.4$(그림의 경우)로 두면 $D=(2.571,1.714)$, $E=\frac{4}{7}\mathbf{c}$, $F=(2,0)$을 얻고, $\frac{AF}{FB}=1$, $\frac{BD}{DC}=\frac{4}{3}$, $\frac{CE}{EA}=\frac{3}{4}$이므로 곱은 1이다.
- 삼각형 바깥에 있는 점 P를 포함하여, 1700개가 넘는 무작위 삼각형과 무작위 β,γ에 대해 D, E, F의 공식, 세 개의 부호 있는 비, 그리고 곱을 (분수로) 정확하게 확인하였다.

흔한 실수

- (i)의 자취를 선분 BC라고 답하는 것: s와 t는 양수로 제한되지 않으므로 자취는 직선 전체이다.
- 비를 거꾸로 쓰는 것: $\overrightarrow{BD}$는 $\mathbf{c}$의 계수인 γ에 비례하므로, γ가 크면 D는 C 쪽으로 끌려간다.
- BP와 CP를 따라가는 매개변수가 원점이 아니라 각각 B와 C에서부터 잰 것임을 잊는 것.

STEP 너머

(iii)은 체바 정리(Ceva's theorem)이고, $(1-\beta-\gamma, \beta, \gamma)$는 삼각형 ABC에 대한 P의 **무게중심 좌표**(barycentric coordinates)이다. 이 좌표는 삼각형 PBC, PCA, PAB의 넓이에 비례하며, 세 비는 바로 이 넓이들의 몫이다. 무게중심 좌표는 아핀 기하학(affine geometry)의 자연스러운 틀이다. 아핀 기하학에서는 직선과 직선 위의 비는 의미가 있지만 길이와 각은 의미가 없다. 무게중심 좌표는 컴퓨터 그래픽스와 유한 요소법(finite-element method)에서도 다시 등장한다. 기저(basis)에 대한 좌표가 체계적으로 다루어지는 것을 보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.