풀이

STEP II 2007, 문제 7

순수수학 • 옌센 부등식

STEP II 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.3 절 **볼록성의 힘**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/convexity.html

핵심 아이디어

옌센 부등식(Jensen's inequality)에 따르면 오목함수(concave function)에서는 함숫값들의 평균이 평균에서의 함숫값보다 크지 않다. 각 소문항은 결국 어떤 오목함수를 쓰고 어떤 수들의 평균을 낼지 알아보는 문제가 된다. 삼각형에서는 세 각의 합이 일정하므로 그 평균을 알 수 있다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에서는 로그가 곱을 합으로 바꾸어 준다. 그다음 (a)와 (b)에서는 AM–GM에 넣을 알맞은 수들의 목록을 정해야 하는데, 여기에는 상수도 몇 개 포함된다.

풀이

오목성

$f(x) = \sin x$이면 $f''(x) = -\sin x$이다. $0 < x < \pi$에서 $\sin x > 0$이므로 $f''(x) < 0$이고, 따라서 $\sin x$는 이 구간에서 오목하다.

$f(x) = \ln x$이면 $f'(x) = 1/x$이고 $f''(x) = -1/x^2$이다. 이 값은 모든 $x > 0$에서 음수이므로 $\ln x$는 $x > 0$에서 오목하다.

소문항 (i)

삼각형의 세 각은 $A, B, C > 0$이고 $A + B + C = \pi$를 만족하므로, 각각은 sin이 오목한 구간 $(0, \pi)$에 속한다. $n = 3$일 때 옌센 부등식을 적용하면

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

양변에 3을 곱하면

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 등호는 정확히 $A = B = C = \pi/3$일 때, 즉 정삼각형일 때 성립한다.

소문항 (ii)

$x > 0$에서 오목한 $f(x) = \ln x$를 택하고 $x_k = t_k > 0$으로 놓는다. 옌센 부등식에 의해

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln t_k \leq \ln\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

좌변은 $\frac{1}{n}\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) = \ln \sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$이다. e^x는 증가함수이므로 부등호의 방향을 바꾸지 않고 양변에 지수함수를 취할 수 있다.

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n},$$

이고, 등호는 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$일 때만 성립한다. ($n = 1$이면 자명하게 등호가 성립하므로 모순이 없다.)

(a)

생각해 보기 어떤 네 수의 평균을 내야 할까?

좌변에는 항이 네 개 있으므로 $n = 4$를 쓴다. 기하평균이 xyz가 되어야 하는데, x^4, y^4, z^4를 쓰면 $\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4} = xyz$가 된다. 상수 16이 네 번째 항이고 $\sqrt[4]{16} = 2$이다. 따라서 모두 양수인 $t_1 = x^4$, $t_2 = y^4$, $t_3 = z^4$, $t_4 = 16$을 택하면

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz,$$

이다. 여기서 네제곱근을 취할 때 $x, y, z > 0$을 이용했다. 양변에 4를 곱하면

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다. 등호가 성립하려면 $x^4 = y^4 = z^4 = 16$, 즉 $x = y = z = 2$이어야 한다.

(b) 이번에는 다섯제곱이므로 $n = 5$로 하고 x^5, y^5, z^5를 수들 가운데 넣는다. 다섯제곱근에서 정확히 xyz가 나오려면 나머지 두 수의 곱이 1이어야 한다. 자연스러운 선택은 $t_4 = t_5 = 1$이다.

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + 1 + 1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5 y^5 z^5 \cdot 1 \cdot 1} = xyz.$$

정리하면 모든 양수 x, y, z에 대하여

$$x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz \geq -2$$

이다.

? **생각해 보기** 이것으로 최솟값이 -2임이 보여졌는가?

이것만으로는 아니다. 하한은 실제로 그 값에 도달할 때에만 최솟값이 된다. AM–GM에서 등호는 다섯 수가 모두 같을 때, 즉 $x^5 = y^5 = z^5 = 1$이므로 $x = y = z = 1$일 때 성립한다. 이때 식의 값은 $1 + 1 + 1 - 5 = -2$이다. 따라서 최솟값은

$$\boxed{-2}, \quad \text{최솟값을 갖는 점: } x = y = z = 1.$$

검산

- (i)에서 직각이등변삼각형은 $1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.414$를 주며, 이는 $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$보다 작다. 삼각형 200 000개를 무작위로 뽑아 확인했을 때도 2.598을 넘는 경우는 없었다.
- (a)에서 $x = y = z = 2$이면 양변이 모두 64이다.
- (b)에서 무작위 시작점으로 수치 최소화를 하면 언제나 $(1, 1, 1)$로 수렴하고 그 값은 -2였다. 또 $x = y = z = 1.1$이면 $3(1.61051) - 5(1.331) \approx -1.82 > -2$이다.

흔한 실수

- 지수함수를 취해도 부등식이 유지되는 것은 e^x가 증가함수이기 때문이라는 점을 잊는 것. 이 점은 한마디 언급할 가치가 있다.
- (b)에서 "≥ -2"에서 멈추고, -2에 도달하는 x, y, z의 값을 제시하지 않는 것.
- x^5, y^5, z^5에 $n = 3$인 AM–GM을 쓰는 것. 그러면 $x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(xyz)^{5/3}$을 얻게 되는데, 이는 $5xyz$와 깔끔하게 비교되지 않는다.

STEP 너머

옌센 부등식은 볼록(convex)함수(또는 오목함수)에 관한 명제이며, 그 본래 무대는 해석학과 확률론이다. 기댓값의 언어로 쓰면, 오목함수 f에 대하여 $\mathrm{E}[f(X)] \leq f(\mathrm{E}[X])$가 된다. (a)와 (b)에서 쓴 요령, 즉 기하평균이 알맞게 나오도록 상수를 채워 넣는 방법은 가중 산술-기하 평균 부등식과 휠더(Hölder) 부등식 이론의 출발점이다. 부등식과 볼록성에 대해 더 알고 싶다면 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를, 확률론적 형태에 대해서는 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.