풀이

STEP II 2007, 문제 6

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2007, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q6

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 주어진 두 함수는 도함수(derivative)의 분모에 모두 $\sqrt{3+x^2}$이 들어 있다. 이 둘을 적절히 결합하면 도함수가 $\sqrt{3+x^2}$ 자체의 상수배가 되므로, 적분(integral)이 저절로 얻어진다. 소문항 (ii)의 미분방정식(differential equation)은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$에 대한 이차방정식이다. 이 이차방정식을 풀면 평범한 1계 방정식 두 개가 나오고, 각각을 풀 때 바로 소문항 (i)의 적분이 필요하다.

풀이

소문항 (i)

$s=\sqrt{3+x^2}$이라 두면 모든 실수 x에 대하여 $s>0$이고 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{s}$이다. 또한 $s>|x|$이므로 $x+s>0$이고, 따라서 로그는 모든 x에서 정의된다.

연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+s)=\frac{1+\dfrac{x}{s}}{x+s}=\frac{\dfrac{s+x}{s}}{x+s}=\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xs)=s+x\cdot\frac{x}{s}=\frac{s^2+x^2}{s}=\frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}}.$$

생각해 보기 이 두 도함수로부터 어떻게 $\int\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$를 얻을 수 있을까?

$\dfrac{3+x^2}{s} = s$이므로, 분모 s 위에 분자 $3+x^2$이 오기를 원한다. 두 번째 도함수의 분자는 $3+2x^2$이다. 여기에 첫 번째 도함수의 3배를 더하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(xs + 3\ln(x+s)\Big) = \frac{3+2x^2+3}{s} = \frac{2(3+x^2)}{s} = 2\sqrt{3+x^2}.$$

따라서

$$\int \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{3}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,) + C.$$

소문항 (ii)

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$라 두자. 주어진 방정식은 p에 대한 이차방정식 $3p^2 + 2xp - 1 = 0$이므로

$$p = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+12}}{6} = \frac{-x \pm \sqrt{3+x^2}}{3}.$$

판별식(discriminant) $4x^2+12$는 항상 양수이므로, 모든 x에서 서로 다른 두 실근이 있다. 두 근의 차 $\frac{2}{3}\sqrt{3+x^2}$은 결코 0이 되지 않으므로, 해가 도중에 한 근에서 다른 근으로 갈아탈 수 없다. (도함수는 중간값 성질(intermediate value property)을 가지므로, 항상 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 이상 떨어져 있는 두 값 사이를 건너뛸 수 없다.) 그러므로 모든 해는 모든 x에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}$$

중 하나를 만족한다. 소문항 (i)을 이용하여 적분하면

$$y = -\frac{x^2}{6} \pm \left(\tfrac{1}{6}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,)\right) + C.$$

$x=1$에서 $\sqrt{3+x^2} = 2$이고 $\ln(x+\sqrt{3+x^2}) = \ln 3$이다.

+ 부호를 택하는 경우: $y(1)=0$에서 $0 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln 3 + C$이므로 $C = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln 3$이다. 로그를 하나로 합치면

$$y = \frac{x\sqrt{3+x^2} - x^2 - 1}{6} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

− 부호를 택하는 경우: $y(1)=0$에서 $0 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 3 + C$이므로 $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 3$이고

$$y = \frac{3 - x^2 - x\sqrt{3+x^2}}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

이 둘이 $(1,0)$을 지나는 두 해이며, 둘 다 모든 실수 x에서 유효하다.

검산

- 각 답에 $x = 1$을 대입하면 괄호 부분은 $\frac{2-1-1}{6} = 0$ (또는 $\frac{3-1-2}{6} = 0$)이고, $\ln \frac{1+2}{3} = 0$이다. 따라서 두 경우 모두 $y(1) = 0$이다.
- p에 대한 두 근의 합은 $-\frac{2x}{3}$이므로, 두 해의 합은 $\frac{1-x^2}{3}$이 되어야 한다. 실제로 제곱근과 로그 항이 상쇄되어 정확히 $\frac{2-2x^2}{6} = \frac{1-x^2}{3}$만 남는다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_{-1}^{2} \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 5.949681$이며, 이는 소문항 (i)의 공식과 일치한다. 방정식의 각 가지를 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 $(1, 0)$에서 $x = 4$까지 진행하면 $y \approx 0.584957$과 $y \approx -5.584957$을 얻는데, 이는 두 공식과 일치한다. (둘의 합은 $-5 = \frac{1-16}{3}$이다.)

흔한 실수

- $3p^2 + 2xp = 1$을 p에 대한 이차방정식으로 풀지 않고, 선형으로 취급하거나 변수분리를 시도하는 것.
- 두 가지에 하나의 상수 C를 쓰는 것. 각 부호마다 따로 상수가 필요하며, 각각 $y(1) = 0$으로 정해진다.
- $\sqrt{3+x^2}$ 앞의 인수 $\frac{1}{3}$을 빠뜨려서, 소문항 (i)의 적분을 잘못된 배수로 사용하는 것.

STEP 너머

$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$처럼 도함수에 대하여 선형이 아닌 방정식을 **음함수 꼴**(*implicit*) 방정식이라 한다. 한 점을 지나는 해가 여러 개일 수 있는데, p에 대한 방정식의 근 하나마다 해가 하나씩 있다. 두 근이 만나는 곳에서는 **특이해**(*singular solution*)가 나타날 수 있다(클레로 방정식(Clairaut's equation)에서처럼 곡선족의 포락선(envelope)이 그 예이다). 이 문제에서는 두 근이 결코 만나지 않으므로 해가 정확히 두 개이다. 소문항 (i)의 $\ln(x + \sqrt{3+x^2})$은 $\operatorname{arsinh}(x/\sqrt{3})$에 상수를 더한 것이며, 이 적분은 사실 표준적인 치환 $x = \sqrt{3}\sinh u$를 모습만 바꾼 것이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 1계 방정식과 그 해의 존재성 및 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.