풀이

# STEP II 2007, 문제 5

순수수학 • 반복 함수

> **STEP II 2007, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q5

## 핵심 아이디어

$\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ 꼴은 $\tan B = \sqrt{3}$, 즉 $B = \frac{\pi}{3}$일 때의 $\tan(A+B)$에 대한 덧셈정리(compound-angle formula)이다. 따라서 $f$는 각에 $\frac{\pi}{3}$을 더할 뿐이고, tan의 주기(period)가 $\pi$이므로 세 번 적용하면 처음 자리로 돌아온다. 소문항 (iii)에서도 sin과 $\frac{\pi}{6}$으로 같은 방법이 통하지만 함정이 하나 있다: $\sqrt{1-t^2}$는 각이 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 있을 때만 코사인이 되며, 이 때문에 답이 달라진다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$y = f(x) = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$로 두자. 그러면 $f^2(x) = \dfrac{y+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,y}$이고, 분자와 분모에 $1-\sqrt{3}\,x$를 곱하면 다음과 같다.

$$f^2(x) = \frac{(x+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3}\,x)}{(1-\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2x}{-2-2\sqrt{3}\,x} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}.$$

이제 $f$를 한 번 더 적용한다. 이번에는 $y = f^2(x)$로 두고 분자와 분모에 $1+\sqrt{3}\,x$를 곱하면 다음과 같다.

$$f^3(x) = \frac{(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})} = \frac{4x}{4} = x.$$

따라서 $f^3$은 항등함수(identity)이다. (제외된 두 점은 바로 모든 단계가 정의되도록 해 주는 점들이다: $f(x)$에는 $x \neq 1/\sqrt{3}$이, $f^2(x)$에는 $x \neq -1/\sqrt{3}$이 필요하고, $f$는 $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}$를 자기 자신 위로 보내므로 계속 적용할 수 있다.)

$2007 = 3 \times 669$이므로

$$f^{2007}(x) = (f^3)^{669}(x) = x.$$

### 소문항 (ii)

$x = \tan\theta$라 하자. $\tan\alpha$가 정의되고 $1 - \sqrt{3}\tan\alpha \neq 0$인 임의의 각 $\alpha$에 대하여, 덧셈정리에 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$을 쓰면 다음을 얻는다.

$$f(\tan\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \tan(\alpha + \tfrac{\pi}{3}).$$

$\alpha = \theta$로 두면 이것이 $n = 1$인 경우이다. $f^k(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}k\pi)$라면 $\alpha = \theta + \frac{1}{3}k\pi$로 두고 이 공식을 적용하여

$$f^{k+1}(x) = f(\tan(\theta + \tfrac{1}{3}k\pi)) = \tan(\theta + \tfrac{1}{3}(k+1)\pi),$$

을 얻으므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 양의 정수 $n$에 대하여 $f^n(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}n\pi)$이다.

그 과정에서 문제가 생기지는 않는다: 공식이 성립하지 않는 것은 어떤 각 $\theta + \frac{1}{3}k\pi$가 $\pi$를 법으로 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{6}$과 합동일 때뿐인데, 그러려면 $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ 또는 $\pm\frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \pm 1/\sqrt{3}$이거나 $x$가 무한대여야 하고, 이는 제외된 경우이다. 이것으로 소문항 (i)도 설명된다: $\frac{\pi}{3}$을 세 번 더하면 tan의 주기인 $\pi$를 더하는 셈이다.

### 소문항 (iii)

$|t| \leq 1$이므로 $\varphi = \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$로 두어 $t = \sin\varphi$로 쓸 수 있다.

> **생각해 보기** $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$는 항상 $\cos\alpha$와 같은가?

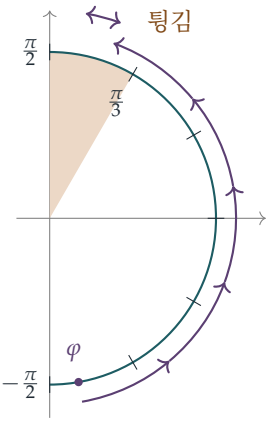
$\cos\alpha \geq 0$일 때만 그렇다. 각 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 대해서는 문제가 없으므로

$$g(\sin\alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\alpha = \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{6}). \qquad (*)$$

$(*)$를 다시 적용하려면 결과를 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 속하는 각의 sin으로 다시 써야 한다. 두 가지 경우가 있다.

- $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$이면 $\alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$이므로 이미 범위 안에 있다.
- $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$이면 $\alpha + \frac{\pi}{6}$이 $\frac{\pi}{2}$를 넘어설 수 있지만, $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6} - \alpha)$이고 $\frac{5\pi}{6} - \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$이다.

($\alpha = \frac{\pi}{3}$에서는 두 경우 모두 $\frac{\pi}{2}$가 된다.) 따라서 범위 안의 각은 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$에 도달할 때까지 $\frac{\pi}{6}$씩 **올라가고**, 그 뒤로는 $\alpha \mapsto \frac{5\pi}{6} - \alpha$에 의해 **반사**되는데, 이 반사는 한 번 더 하면 원래대로 돌아온다: 각은 두 값 사이를 오간다.




$g$를 한 번 적용할 때마다 각은 단위원의 오른쪽 반원을 따라 $\frac{\pi}{6}$만큼 이동한다. 일단 색칠된 구간 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$에 들어서면 그 안에서 앞뒤로 뒤집힌다.

이제 필요한 올라가기 횟수를 $m$이라 하자. 즉 $\varphi + \frac{m\pi}{6} \geq \frac{\pi}{3}$을 만족하는 가장 작은 정수 $m \geq 0$이다. $\varphi \geq -\frac{\pi}{2}$이므로 $m \leq 5$이고, $t$로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ | $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ | $[0, \frac{1}{2})$ | $[-\frac{1}{2}, 0)$ | $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ | $[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$\varphi_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi_0 = \varphi$로 하여 $g^n(t) = \sin\varphi_n$으로 쓰자. $n \leq m$이면 그 이전의 각은 모두 $\frac{\pi}{3}$보다 작았으므로 $\varphi_n = \varphi + \frac{n\pi}{6}$이다. 그러면 $\varphi_m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$이므로 $\varphi_{m+1} = \frac{5\pi}{6} - \varphi_m$, $\varphi_{m+2} = \varphi_m$과 같이 번갈아 나타난다. $\sin\varphi_{m+1} = \sin(\varphi_m + \frac{\pi}{6}) = \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6})$이므로, $\varphi = \arcsin t$와 표의 $m$을 써서 다음을 얻는다.

$$g^n(t) = \begin{cases} \sin(\varphi + \frac{n\pi}{6}), & n \leq m+1, \\ \sin(\varphi + \frac{m\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ 짝수}, \\ \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ 홀수}. \end{cases}$$

특히 모든 $t$와 모든 $n \geq 5$에 대하여 $g^{n+2}(t) = g^n(t)$이다.

예를 들어 $t = 0$이면 $\varphi = 0$, $m = 2$이고, 궤도(orbit)는 $0 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \cdots$이다.

## 검산

- $x = 1$에서: $f(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$, $f^2(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$이고 $f(\sqrt{3}-2) = 1$이며, 이는 $\tan\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{7\pi}{12}$, $\tan\frac{11\pi}{12}$와 일치한다.

- 직접 계산하면 $g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$이고 $g(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다: 튕김은 실제로 일어난다. $g^5(0)$에 대한 순진한 추측 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$는 틀렸으며, 실제로 반복하면 1이 나온다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 5000개의 $t \in [-1, 1]$에서 출발하여 $g$를 열아홉 번 반복한 결과는 상자 안의 공식과 $2 \times 10^{-12}$ 이내에서 일치했다.

## 흔한 실수

- (iii)의 답을 모든 $n$에 대하여 $\sin(\varphi + \frac{n\pi}{6})$로 쓰는 것. 이는 $\sqrt{1-t^2} \geq 0$이라는 사실, 따라서 각이 결코 $\frac{\pi}{2}$를 넘을 수 없다는 점을 잊은 것이다.
- $f^2$ 계산에서의 산술 실수: 정리하기 전에 분자와 분모 전체에 $1 - \sqrt{3}\,x$를 곱하라.

## STEP 너머

$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이고, 두 뫼비우스 변환의 합성(composition)은 각각의 행렬 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$의 곱에 대응한다. 여기서 $f$의 행렬은 $2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$로, $\frac{\pi}{3}$만큼의 회전을 상수배한 것이며 그 세제곱은 항등행렬의 상수배이다. 이것이 $f^3(x) = x$인 이유이다. 소문항 (iii)은 동역학계(dynamical systems)를 살짝 맛보게 해 준다: 주기적이지는 않지만 **결국 주기적인**(*eventually periodic*) 점들이 나타난다. 뫼비우스 변환에 대한 아름다운 기하학적 설명은 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에서 찾아볼 수 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.