풀이

STEP II 2007, 문제 4

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2007, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q4

핵심 아이디어

덧셈정리(compound-angle formulae)로 모든 항을 전개한 뒤 $\cos A \cos B$로 나누면, 주어진 방정식은 $t = \tan A$와 $u = \tan B$에 대한 관계식이 되고, 이 식은 tu항, t항, u항, 상수항으로 이루어진다. 이런 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해(factorise)되는 것은 "직사각형 완성하기"(completing the rectangle)를 했을 때 남는 것이 없을 때와 정확히 같고, 그 나머지는 $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$의 상수배임이 밝혀진다. 세 방정식은 모두 $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = 1$이고 이 값들은 조건을 만족하므로, 남은 일은 A와 B를 올바르게 고르는 것뿐이다.

풀이

인수분해

덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned}&\alpha \sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B)\\ &\quad= \alpha(\sin A\cos B - \cos A\sin B) + \beta(\cos A\cos B - \sin A\sin B)\\ &\qquad - \gamma(\sin A\cos B + \cos A\sin B).\end{aligned}$$

$\cos A\cos B \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다. $t = \tan A$, $u = \tan B$라 하면, 주어진 방정식은 $P(t,u) = 0$과 동치이다. 여기서

$$P(t,u) = \alpha(t-u) + \beta(1-tu) - \gamma(t+u) = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \beta.$$

$\beta \neq 0$이므로

$$m = -\frac{\alpha+\gamma}{\beta}, \qquad n = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}.$$

이라 두자. 그러면 $-\beta(t-m)(u-n) = -\beta tu + \beta n\, t + \beta m\, u - \beta mn = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta}$이고, 이는 상수항을 제외하면 P와 일치한다. 따라서 모든 t와 u에 대해

$$P(t,u) = -\beta(t-m)(u-n) + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta}. \qquad (*)$$

충분조건. $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$이면 $(*)$의 상수항이 사라지므로, ($\beta \neq 0$이므로) 방정식은 $(\tan A - m)(\tan B - n) = 0$이 되고, 여기서 m과 n은 α, β, γ에만 의존한다.

필요조건. 방정식이 상수 m', n'에 대해 $(t-m')(u-n') = 0$으로 간단히 된다고 하자. 즉 $P(t,u) = 0$은 $t = m'$ 또는 $u = n'$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. $c = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)/\beta$라 쓰고 $c \neq 0$이라 가정하자. 그러면 모든 쌍 (m', u)가 해이므로, $P(m', u) = -\beta(m'-m)(u-n) + c$는 모든 u에 대해 영이다. $m' \neq m$이면 이것은 u에 대한 상수가 아닌 일차함수이므로 항상 영일 수는 없고, $m' = m$이면 이것은 $c \neq 0$과 같으므로 결코 영이 아니다. 어느 경우든 모순(contradiction)이므로 $c = 0$, 즉 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$이다. ("간단히 된다"를 "$P$가 $(t-m)(u-n)$의 상수배이다"로 읽는다면, tu의 계수를 비교하면 그 상수는 $-\beta$일 수밖에 없고, 그러면 다시 $(*)$에 의해 $c = 0$이어야 한다.)

> **생각해 보기** 아래 소문항들에서 나눗셈을 할 수 없는 경우, 즉 $\cos x = 0$이면 어떻게 되는가?

$(*)$에 다시 $\cos A \cos B$를 곱하자. $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$일 때

$$\alpha\sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B) = -\beta(\sin A - m\cos A)(\sin B - n\cos B), \qquad (**)$$

를 얻는다. 이제 양변은 단지 사인과 코사인의 조합이므로, 이 항등식(identity)은 **모든** A와 B에 대해 성립한다(양변은 연속(continuous)이고 $\cos A \cos B \neq 0$일 때마다 일치하기 때문이다). $(**)$를 사용하면 $\cos A = 0$인 경우를 따로 다룰 필요가 전혀 없다.

세 소문항 모두에서 $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 1$이고 $\alpha^2 = 4 = \beta^2+\gamma^2$이다. 따라서

$$m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

이고 방정식은 $(\sin A + \sqrt{3}\cos A)(\sin B - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B) = 0$이다. $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$이면 반드시 $\cos A \neq 0$임에 주목하자(그렇지 않으면 $\sin A = 0$도 되기 때문이다). 따라서 이는 $\tan A = -\sqrt{3}$과 같다. 마찬가지로 두 번째 괄호는 $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때, 그리고 그때에만 영이 된다.

소문항 (i)

$A = x$, $B = \frac{1}{4}\pi$로 잡으면 $A - B = x - \frac{1}{4}\pi$, $A + B = x + \frac{1}{4}\pi$이다. $\tan\frac{1}{4}\pi = 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 두 번째 괄호는 영이 아니고, 따라서 $\tan x = -\sqrt{3}$이어야 한다:

$$x = \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{또는} \quad x = \tfrac{5}{3}\pi.$$

소문항 (ii)

이번에는 $A = x$, $B = \frac{1}{6}\pi$이다. 그런데 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = n$이므로 두 번째 괄호는 $\sin\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$이다. $(**)$에 의해 좌변에서 우변을 뺀 것은 항등적으로 영이다. 즉 이 방정식은 항등식이며, $0 \le x < 2\pi$인 **모든** x가 이를 만족한다.

소문항 (iii)

$A - B = x + \frac{1}{3}\pi$이고 $A + B = 3x$이어야 한다. 두 식을 더하고 빼면

$$A = 2x + \tfrac{1}{6}\pi, \qquad B = x - \tfrac{1}{6}\pi.$$

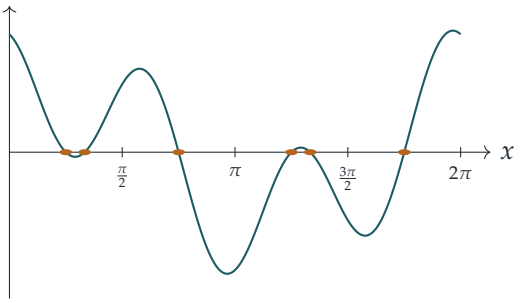
따라서 해는 $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ 또는 $\tan(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$으로 주어진다.

첫 번째 경우 $2x + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$이므로, 정수 k에 대해 $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$이다. $[0, 2\pi)$에서 이는 $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$를 준다.

두 번째 경우 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k\pi$이므로 $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$이고, $x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$를 얻는다.

이 여섯 값은 서로 다르므로 해는

$$x = \tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{5}{4}\pi,\ \tfrac{4}{3}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi.$$



(iii)의 좌변에서 우변을 뺀 그래프는 표시된 여섯 점에서만 정확히 영을 지난다.

검산

- (i)에서 $x = \frac{2}{3}\pi$일 때: $2\sin\frac{5}{12}\pi \approx 1.932$, $\sqrt{3}\cos\frac{11}{12}\pi \approx -1.673$, $\sin\frac{11}{12}\pi \approx 0.259$이고, 실제로 $1.932 - 1.673 = 0.259$이다.
- (ii)에서 $x = 0$을 대입해 보면: $2\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sqrt{3}\cos\frac{1}{6}\pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{1}{6}\pi$이다. 다른 어떤 x도 마찬가지로 성립한다.
- (iii)에서 $x = \frac{1}{4}\pi$일 때: $2\sin\frac{7}{12}\pi \approx 1.932$이고 $\sin\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{3}{4}\pi \approx 0.707 + 1.225 = 1.932$이다. $[0, 2\pi)$에서 수치적으로 근을 찾아보면 정확히 위의 여섯 근이 나온다.

흔한 실수

- (iii)에서 $A = x + \frac{1}{3}\pi$로 잡고 B를 $3x$로부터 정하는 것: $A - B = x + \frac{1}{3}\pi$, $A + B = 3x$를 연립하여 풀어야 한다.
- (iii)에서 $k = 0, 1$에서 멈추어 해를 놓치는 것: $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$의 주기(period)는 $\frac{1}{2}\pi$이므로, 그 괄호에서 나오는 해는 네 개이다.
- (ii)가 항등식임을 알아채지 못하고 특정한 해를 찾아 헤매는 것.

STEP 너머

식 $-\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta$는 이차곡선(conic)의 한 퇴화된 경우이다. 그 영점 집합은 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이지만, 행렬식(determinant)과 비슷한 어떤 양이 영이 되면 두 직선으로 쪼개진다. 이차형식(quadratic form)이 언제 인수분해되는지 판정하는 것은 행렬과 고유값(eigenvalue)을 이용해 이차곡선을 분류하는 첫걸음이며, 이는 대학 1학년 선형대수(linear algebra)에서 다루는 주제이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 흐름의 삼각방정식이 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.