풀이

STEP II 2007, 문제 3

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2007, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 $1/(a^2+x^2)$의 표준 적분(standard integral)에 달려 있으므로, 이 문제 전체의 관건은 치환(substitution)을 한 뒤 그 꼴을 알아보는 것이다. (i)(a)에서는 분자(numerator) $\cos x$가 $\sin x$의 도함수(derivative)라는 점이 강력한 힌트이다. (i)(b)에서는 반각 치환(half-angle substitution)이 $1+\sin^2 x$를 t에 대한 사차식(quartic)으로 바꾸는데, 핵심은 같은 과정을 거꾸로 돌릴 수도 있다는 점을 알아차리는 것이다. 즉 (ii)에서는 어떤 삼각함수의 적분이 새로운 사차식을 만들어 내는지 찾아낸다.

풀이

표준 적분

$a \neq 0$이라 하고 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$인 $x = a\tan\theta$로 놓자. θ가 이 구간 전체를 움직일 때 (a의 부호와 관계없이) x는 모든 실수를 정확히 한 번씩 지나므로 이 치환은 타당하고, $\tan\theta = x/a$로부터 $\theta = \arctan(x/a)$를 얻는다. 이제 $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고

$$a^2 + x^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

이므로

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a} + \text{상수} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{상수},$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (i)(a)

$u = \sin x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x$이고, x가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 갈 때 u는 0에서 1까지 간다. $a = 1$인 표준 적분을 이용하면

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \, \mathrm{d}u = \Big[\arctan u \Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

소문항 (i)(b)

$t = \tan \frac{1}{2}x$로 놓으면 다음의 표준적인 반각 공식을 얻는다.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t,$$

마지막 식은 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$이기 때문이다. 적분 구간의 끝 $x = 0$과 $x = \frac{1}{2}\pi$는 각각 $t = 0$과 $t = \tan \frac{1}{4}\pi = 1$이 된다. 다음으로

$$1 + \sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

이들을 모두 합치면 $1+t^2$ 인수들이 완전히 약분된다.

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{(1+t^2)^2}{1+6t^2+t^4} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4} \, \mathrm{d}t.$$

2로 나누면 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$가 되어 요구된 결과를 얻는다. ((i)(a)에 의해 그 값은 $\pi/8$이다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 사차식 $1+14t^2+t^4$는 어디에서 나왔을까?

(i)(b)에서 $6t^2$은 $1+t^2$을 제곱해서 생긴 $2t^2$에 $\sin^2 x$에서 생긴 $4t^2 = (2t)^2$이 더해진 것이었다. $14t^2$을 얻으려면 $12t^2 = 3(2t)^2$이 더 필요하고, 이는 곧 $\sin^2 x$ 대신 $3\sin^2 x$를 쓰는 것이다. 실제로 $t = \tan \frac{1}{2}x$로 놓으면

$$1 + 3\sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 12t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+14t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

따라서 $1+\sin^2 x$ 대신 $1+3\sin^2 x$를 넣고 (i)(b)와 똑같이 계산하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4} \, \mathrm{d}t.$$

좌변은 (i)(a)에서처럼 $u = \sin x$로 놓고 계산한다.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}+u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\Big[\arctan\left(\sqrt{3}\,u\right) \Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3},$$

여기서 $a = 1/\sqrt{3}$인 표준 적분을 이용하였다. 이를 반으로 나누면

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $I \approx 0.785398$ (이는 $\pi/4$이다), (i)(b)의 적분은 ≈ 0.392699 (이는 $\pi/8$이다), (ii)의 적분은 ≈ 0.302300이며, 이는 $\sqrt{3}\,\pi/18 \approx 0.302300$과 일치한다. 간단한 타당성 검사도 해 보자. 두 사차식 피적분함수(integrand)는 모두 $t = 0$에서 1, $t = 1$에서 0이고, 분모에 $14t^2$이 있는 쪽이 구간 전체에서 더 작으므로 그 적분값은 $\pi/8 \approx 0.393$보다 작아야 하는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $\frac{2}{1+t^2}$를 빠뜨려서 (i)(b)의 인수 2를 잃어버리는 것.
- 인수 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 없이 $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+3u^2} = \arctan(\sqrt{3}u)$라고 쓰는 것. 먼저 3을 묶어 내거나 $v = \sqrt{3}u$로 치환하라.
- 치환한 뒤에도 적분 구간을 x에 대한 값으로 남겨 두는 것. $x = \frac{1}{2}\pi$는 $t = 1$에 대응한다.

STEP 너머

더 직접적인 방법도 있다. 분자와 분모를 t^2으로 나누고 $v = t + 1/t$로 놓으면 $\frac{1-t^2}{1+kt^2+t^4}$는 $-\frac{1}{v^2+k-2}$가 되어, 역시 arctan으로 이어지는 적분이 된다. 여기서 얻는 일반적인 교훈, 즉 $\sin x$와 $\cos x$의 유리함수(rational function)는 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 치환을 하면 항상 t의 유리함수가 되므로 원리적으로 항상 적분할 수 있다는 사실은 초등함수로 적분하는 체계적인 이론의 출발점이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.