풀이

STEP II 2007, 문제 2

순수수학 • 삼차곡선과 넓이

> **STEP II 2007, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q2

핵심 아이디어

삼차함수(cubic)의 극점(turning point)에 관한 모든 정보는 그 도함수(derivative)에 담겨 있다. 극점이 $x = p$와 $x = q$에 있으므로 도함수는 $(x-p)(x-q)$의 상수배여야 하고, 계수를 비교(comparing coefficients)하면 b와 c를 곧바로 얻는다. 그다음 $m-n$을 구하는 가장 깔끔한 방법은 두 극점 사이에서 도함수를 적분하는 것이고, 넓이는 $y-n$이 $x=q$에서 중근(double root)을 가진다는 사실을 알아차리면 쉽게 구해진다.

풀이

소문항 (i)

미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 2bx + c.$$

이 이차식은 극점 $x = p$와 $x = q$에서 0이 되고 최고차항의 계수가 6이므로

$$6x^2 - 2bx + c = 6(x-p)(x-q) = 6x^2 - 6(p+q)x + 6pq.$$

계수를 비교하면

$$b = 3(p+q), \qquad c = 6pq.$$

나중에 쓸 사실이 두 가지 있다. 첫째, x^3의 계수가 양수이므로 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6(x-p)(x-q)$는 두 근의 바깥에서 양수이고 두 근 사이에서 음수이다. 따라서 곡선은 증가했다가 감소한 뒤 다시 증가한다. 즉 극대(maximum)가 먼저 나타나고, $p < q$이다.

둘째, 조건 $n > 0$은 q의 범위를 제한한다. $x = q$를 대입하면

$$n = 2q^3 - 3(p+q)q^2 + 6pq^2 = q^2(3p - q),$$

이므로 $n > 0$은 $q < 3p$를 뜻한다. 종합하면 $0 < p < q < 3p$이다.

소문항 (ii)

곡선은 원점을 지나고

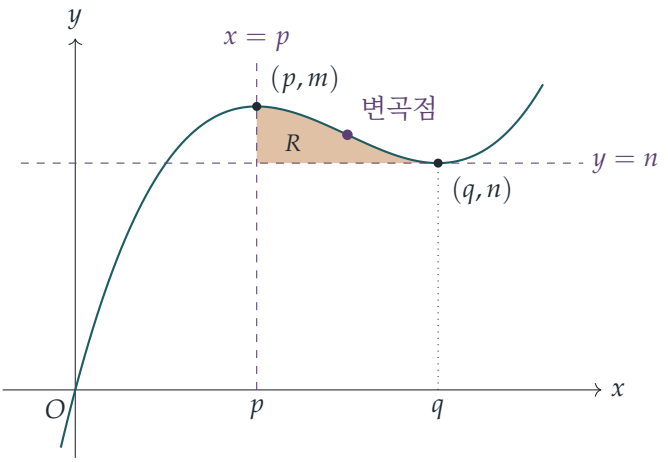
$$y = x(2x^2 - bx + c),$$

이며, 이차 인수의 판별식(discriminant)은

$$b^2 - 8c = 9(p+q)^2 - 48pq = 3(3p - q)(p - 3q).$$

$q < 3p$이고 $p < q < 3q$이므로 첫 번째 괄호는 양수, 두 번째 괄호는 음수이다. 따라서 판별식은 음수이고, 곡선이 x축과 만나는 점은 원점뿐이다. 그러므로 곡선은 $-\infty$에서 올라와 O에서 축을 지나고, 극대점 (p, m)까지 올라간 뒤, 여전히 축 위에 있는 극소점(minimum) (q, n)까지 내려갔다가, 그 뒤로는 계속 증가한다.

변곡점(point of inflection)은 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x - 2b = 0$인 곳, 즉 $x = \frac{b}{6} = \frac{1}{2}(p+q)$로, 두 극점의 한가운데에 있다.



영역 R(색칠한 부분)는 $x = p$와 $x = q$ 사이에서 곡선 아래, 직선 $y = n$ 위에 있다. 곡선은 극소점에서 $y = n$에 접한다.

대칭성. $s = \frac{1}{2}(p+q)$, $h = q - p$로 두고, $x = s + t$로 놓아 변곡점을 기준으로 잰다. 그러면 $x - p = t + \frac{1}{2}h$이고 $x - q = t - \frac{1}{2}h$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6\left(t^2 - \tfrac{1}{4}h^2\right),$$

이고, 이는 t에 대한 우함수(even function)이다. 따라서 0부터의 적분, 즉 $y - y(s) = 2t^3 - \frac{3}{2}h^2t$는 t에 대한 기함수(odd function)이다. 그러므로 $y(s+t) - y(s) = -\big(y(s-t) - y(s)\big)$이다. 즉 곡선은 **변곡점에 대하여 위수 2의 회전대칭**(*rotational symmetry*)을 가진

다(그 점을 중심으로 반 바퀴 돌리면 곡선이 자기 자신으로 옮겨진다). 특히 이 반 바퀴 회전은 두 극점을 서로 맞바꾸므로, 변곡점은 (p,m)과 (q,n)의 중점, 즉 $\left(\frac{1}{2}(p+q),\frac{1}{2}(m+n)\right)$이다.

소문항 (iii)

극대에서 극소까지 내려간 양은 기울기(gradient)의 적분이다.

$$m-n=y(p)-y(q)=-\int_p^q 6(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x.$$

생각해 보기 전개하지 않고 $\int_p^q (x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x$를 빠르게 계산하는 방법이 있을까?

$x=p+u$로 치환하면 $h=q-p$에 대하여 $x-q=u-h$이고, u는 0부터 h까지 움직인다.

$$\int_0^h u(u-h)\,\mathrm{d}u=\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{2}=-\frac{h^3}{6}.$$

따라서

$$m-n=-6\left(-\frac{(q-p)^3}{6}\right)=(q-p)^3,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iv)

$p\le x\le q$에서 곡선은 m에서 n까지 감소하므로 $y=n$ 위 또는 그 위쪽에 있고,

$$\text{넓이}R=\int_p^q (y-n)\,\mathrm{d}x.$$

삼차식 $y-n=2x^3-bx^2+cx-n$은 $x=q$에서 0이 되고 그 도함수도 거기서 0이 되므로, $x=q$는 중근이고 어떤 r에 대하여

$$y-n=2(x-q)^2(x-r)$$

이다. x^2의 계수를 비교하면 $-2(2q+r)=-b=-3(p+q)$이므로 $r=\frac{1}{2}(3p-q)$이다. 다시 $h=q-p$로 두고 $u=x-q$($-h$부터 0까지 움직인다)로 놓으면

$$x-r=u+q-\tfrac{1}{2}(3p-q)=u+\tfrac{3}{2}h.$$

그러므로

$$\begin{aligned}\text{넓이}R&=\int_{-h}^0 2u^2\left(u+\tfrac{3}{2}h\right)\mathrm{d}u=\left[\tfrac{1}{2}u^4+hu^3\right]_{-h}^0\\&=-\left(\tfrac{1}{2}h^4-h^4\right)=\tfrac{1}{2}h^4=\tfrac{1}{2}(q-p)^4,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

$p = 1, q = 2$로 잡자($q < 3p$이므로 허용된다). 그러면 $b = 9, c = 12$이고, $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$는 $y' = 6(x-1)(x-2)$이며 $m = y(1) = 5, n = y(2) = 4 > 0$이다. 따라서 $m - n = 1 = (q-p)^3$이다. 변곡점은 두 극점의 중점인 $(1.5, 4.5)$이고, $[1,2]$에서 $y - 4$를 수치적분하면 $0.5000 = \frac{1}{2}(q-p)^4$를 얻는다. 또한 $0 < p < q < 3p$를 만족하는 무작위 쌍 2000개에 대해서도 네 결과를 모두 확인하였다.

흔한 실수

- $q < p$로 잡는 것: 삼차항의 계수가 양수이면 극대는 언제나 극소의 왼쪽에 있다.
- $y - n$ 대신 y를 적분하는 것: 이렇게 하면 직선 $y = n$ 아래에 있는 높이 n인 직사각형이 더해진다.
- 대칭성을 직선 $x = \frac{1}{2}(p+q)$에 대한 반사로 설명하는 것: 삼차함수는 거울 대칭이 아니라 한 점에 대한 반 바퀴 회전 대칭을 가진다.

STEP 너머

모든 삼차함수의 그래프는 변곡점에 대하여 반 바퀴 회전 대칭인 곡선이다. x를 평행이동하여 x^2항을 없애면(카르다노(Cardano)의 공식에서 쓰이는 "축약 삼차식(depressed cubic)" 치환) 기함수에 상수를 더한 꼴만 남기 때문이다. 소문항 (iv)의 중근 기법은 접함(tangency)과 근의 중복도(multiplicity) 이론의 출발점이며, 이 이론은 대수기하학(algebraic geometry)에서 핵심이 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 정신의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.