풀이

STEP II 2007, 문제 12

확률과 통계 • 기하분포의 최댓값

> **STEP II 2007, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q12

핵심 아이디어

다소 번거로운 절차 설명은 잊고 각 주사위를 따로따로 살펴보자. 각 주사위는 처음으로 6이 나올 때까지 던져지고, 실험은 두 주사위 중 **더 늦은** 쪽이 6에 도달했을 때 끝난다. 따라서 던지는 횟수는 서로 독립(independent)인 두 기하 확률변수(geometric random variable)의 최댓값이며, 최댓값은 누적 확률(cumulative probability) $\mathrm{P}(\max \le r)$를 통해 다루는 것이 가장 쉽다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 주사위에서 처음으로 6이 나오는 던지기의 번호를 X라 하고, 두 번째 주사위에 대해서도 같은 방식으로 Y를 정의하자. 주사위를 던지는 각 시행은 다른 모든 시행과 독립이므로 X와 Y는 독립이고, 각각은 기하분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad \mathrm{P}(X \le r) = 1 - \mathrm{P}(\text{처음 } r\text{번 모두 6이 아님}) = 1 - q^r.$$

주어진 절차는 이것과 어떻게 들어맞을까? 어느 주사위에서도 6이 나오지 않은 동안에는 두 주사위를 모두 던지고, 한쪽에서 6이 나오면 그 뒤로는 다른 쪽만 계속 던진다. 어느 경우든 각 주사위는 정확히 처음 6이 나올 때까지만 던져지고(그 뒤로는 절대 던져지지 않는다), 두 주사위 모두에서 6이 나오는 즉시 멈춘다. 두 주사위에서 같은 던지기에 처음으로 6이 나온다면, 그것이 바로 두 주사위에서 함께 6이 나오는 경우이다. 따라서 던지는 횟수는

$$N = \max(X, Y).$$

? 생각해 보기 왜 $\mathrm{P}(N = r)$를 직접 구하지 않고 $\mathrm{P}(N \le r)$를 다루는가?

사건 $N \le r$는 단순히 "$X \le r$ 이고 $Y \le r$"이며, 독립성에 의해 이것은 곱이 된다. 반면 사건 $N = r$는 번거로운 여러 경우(한 주사위는 r번째에 끝나고 다른 주사위는 그 전에 끝나는 경우, 또는 둘 다 r번째에 끝나는 경우)로 나뉜다. 따라서

$$\mathrm{P}(N \le r) = \mathrm{P}(X \le r)\,\mathrm{P}(Y \le r) = (1 - q^r)^2,$$

이고, $r \ge 1$에 대하여

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = r) &= \mathrm{P}(N \le r) - \mathrm{P}(N \le r - 1) \\
&= (1 - q^r)^2 - (1 - q^{r-1})^2 \\
&= \left[(1 - q^r) - (1 - q^{r-1})\right]\left[(1 - q^r) + (1 - q^{r-1})\right] \\
&= (q^{r-1} - q^r)(2 - q^{r-1} - q^r) \\
&= pq^{r-1}\,(2 - q^{r-1} - q^r),
\end{aligned}$$

이다. 여기서 제곱의 차(difference of two squares)를 이용한 뒤 $q^{r-1} - q^r = q^{r-1}(1 - q) = pq^{r-1}$을 사용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

기댓값(expectation)을 구하기 위해 확률을 두 부분으로 나누자.

$$\mathrm{P}(N = r) = 2pq^{r-1} - pq^{2r-2}(1 + q).$$

주어진 결과를 미분하면(또는 x로 나누면) $|x| < 1$일 때 $\sum_{r \ge 1} r x^{r-1} = (1 - x)^{-2}$를 얻는다. 이것을 $x = q$와 $x = q^2$에 대해 사용하면($0 < p \le 1$이므로 둘 다 1보다 작다)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= 2p \sum_{r=1}^{\infty} rq^{r-1} - p(1 + q) \sum_{r=1}^{\infty} r(q^2)^{r-1} \\
&= \frac{2p}{(1 - q)^2} - \frac{p(1 + q)}{(1 - q^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{p(1 + q)}{p^2(1 + q)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1 + q)} \\
&= \frac{1 + 2q}{p(1 + q)},
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 - q = p$와 $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$를 사용하였다. p만으로 나타내면($q = 1 - p$를 대입하면)

$$\mathrm{E}(N) = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

소문항 (ii)

실험을 여러 번 하면 던지는 횟수의 평균은 $\mathrm{E}(N)$에 가까워야 하므로, $\mathrm{E}(N) = m$을 풀어서 p를 추정한다.

$$m\,p(2-p) = 3-2p \quad\Longleftrightarrow\quad mp^2 - 2(m+1)p + 3 = 0,$$

따라서

$$p = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 3m}}{m} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

? 생각해 보기 어느 근을 택해야 하는가?

모든 실험은 적어도 한 번 던지므로 $m \geq 1$이다. 그러면 $\sqrt{m^2-m+1} \geq 1$이므로($m^2 - m = m(m-1) \geq 0$이기 때문이다), 더하기 부호를 택한 근은 적어도 $(m+2)/m > 1$이 되어 확률이 될 수 없다. 빼기 부호를 택한 근은 같은 부등식(inequality)에 의해 많아야 $m/m = 1$이고, $(m+1)^2 > m^2 - m + 1$이므로 양수이다. 따라서 추정값은

$$\hat{p} = \frac{m+1-\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

검산

- $p = 1$이면 모든 실험은 한 번 던지고 끝난다. 실제로 $\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$이고, $m = 1$이면 $\hat{p} = (2-1)/1 = 1$이다.
- 확률의 합은 1이다. $\sum_r \mathrm{P}(N=r)$는 연이어 소거되어(telescoping) $\lim_{r\to\infty}(1-q^r)^2 = 1$이 된다.
- 공정한 주사위의 경우 $p = \frac{1}{6}$이면 $\mathrm{E}(N) = \frac{8/3}{11/36} = \frac{96}{11} \approx 8.73$으로, 주사위 하나에 평균적으로 필요한 6번보다 조금 많은데, 마땅히 그래야 한다. 200,000번의 실험을 모의실험한 결과 평균은 8.71이었고, $\hat{p}$의 식에 $m = 96/11$을 대입하면 $\frac{1}{6}$이 나온다.

흔한 실수

- 각 주사위의 던지기를 따로 세는 것: 두 주사위를 동시에 던지는 것은 **한 번**의 던지기로 센다. 바로 이 때문에 $N = \max(X, Y)$이다.
- 항 $pq^{2r-2}(1+q)$에는 $x = q$가 아니라 $x = q^2$일 때의 합이 필요하다는 것을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 어느 근이 확률이 될 수 있는지 확인하지 않고 두 근을 모두 남겨 두는 것.

STEP 너머

$\mathrm{P}(\max \leq r) = \prod \mathrm{P}(X_i \leq r)$라는 기법은 독립인 확률변수들의 최댓값(그리고 $\geq$를 쓰면 최솟값)을 다루는 표준적인 방법이며, **순서통계량**(order statistics)의 출발점이다. 소문항 (ii)는 **적률법**(method of moments)이다. 즉 표본평균(sample mean)을 이론적 평균과 같게 놓고 모수에 대해 푸는 방법이다. 대학 1학년 통계학에서는 이를 최대가능도(maximum likelihood) 방법과 비교하고, 이러한 추정량(estimator)이 얼마나 정확한지를 묻는다. 확률 쪽으로는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.