풀이

STEP II 2007, 문제 11

역학 • 3차원 공간의 포물체

> **STEP II 2007, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q11

핵심 아이디어

운동을 하나의 위치 벡터(position vector)로 나타낸다. 수평 방향 속도는 일정하고, 중력의 영향을 받는 것은 연직 성분뿐이다. $\mathbf{r}(t)$를 종이에 적어 두면 O로부터의 거리는 그냥 $|\mathbf{r}|$이고, 최단 거리는 이차식을 최소화하여 얻는다. 마지막 소문항이 성립하는 것은 총알이 매우 빨라서 총알이 날아가는 동안 입자가 거의 움직이지 않기 때문이다.

풀이

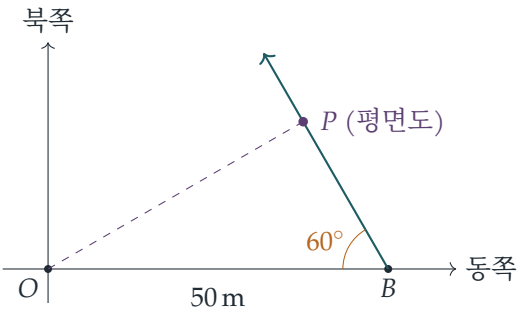
입자를 중력만 받아 움직이는 점으로 모형화하고($g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, 공기 저항 없음), O를 원점으로 잡는다. 그러면 B의 위치 벡터는 $50\mathbf{i}$이다.

소문항 (i)

처음 속도의 성분. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$이면 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$이고 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다(세 변이 1, 2, $\sqrt{5}$인 삼각형). 따라서 처음 속도는 다음과 같다.

$$\text{수평 방향 속력} 25 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}, \qquad \text{연직 방향 속력} 25 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

수평 방향은 어느 쪽인가? 이 방향은 직선 OB와 60°를 이룬다. 입자가 대략 동쪽으로, 즉 O에서 멀어지는 쪽으로 향한다면 O를 지나갈 수 없다. O의 북쪽을 지나가려면 서쪽으로 되돌아오면서 북쪽으로 향해야 한다. 따라서 수평 방향은 북쪽 편에서 $\overrightarrow{BO}$(서쪽)와 60°를 이루며, 단위 벡터는 $-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$이다.



따라서 수평 방향 속도는

$$10\sqrt{5}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-5\sqrt{5}\,\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,\mathbf{j},$$

이고, 중력은 연직 방향으로 작용하므로 이 값은 일정하게 유지된다. 연직 방향으로는 $z=5\sqrt{5}\,t-\frac{1}{2}(10)t^2$이다. 출발점 $50\mathbf{i}$를 더하면

$$\mathbf{r}(t)=(50-5\sqrt{5}\,t)\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,t\,\mathbf{j}+(5\sqrt{5}\,t-5t^2)\mathbf{k}.$$

O로부터의 거리. 각 성분을 제곱하여 더하면

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}|^2&=(2500-500\sqrt{5}\,t+125t^2)+375t^2+(125t^2-50\sqrt{5}\,t^3+25t^4)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500.\end{aligned}$$

이것을

$$\begin{aligned}25(t^2-\sqrt{5}\,t+10)^2&=25(t^4+5t^2+100-2\sqrt{5}\,t^3+20t^2-20\sqrt{5}\,t)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500,\end{aligned}$$

과 비교하면 같다. 따라서 $|\mathbf{r}|=5\,|t^2-\sqrt{5}\,t+10|$이다. 이차식 $t^2-\sqrt{5}\,t+10$의 판별식(discriminant)은 $5-40<0$이므로 이 식은 항상 양수이고, 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

$$|\mathbf{r}|=5(t^2-\sqrt{5}\,t+10)\text{ m},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

점 P. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$t^2-\sqrt{5}\,t+10=(t-\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2+\tfrac{35}{4},$$

이므로 거리는 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$일 때 최소이고, 최단 거리는 $5\cdot\frac{35}{4}=\frac{175}{4}=43.75\,\text{m}$이다. $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$를 대입하면 $\sqrt{5}\,t=\frac{5}{2}$이고 $t^2=\frac{5}{4}$이므로

$$\overrightarrow{OP}=\tfrac{75}{2}\,\mathbf{i}+\tfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{25}{4}\,\mathbf{k}\quad\text{(단위: 미터)}.$$

$\overrightarrow{OP}$의 수평 부분은 동쪽 성분이 $\frac{75}{2}$, 북쪽 성분이 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$이다. 방위각(bearing) θ는 북쪽에서 시계 방향으로 잰 각이므로

$$\tan\theta = \frac{\text{동쪽}}{\text{북쪽}} = \frac{75/2}{25\sqrt{3}/2} = \sqrt{3},$$

이고, 두 성분이 모두 양수이므로 $\theta = 60^\circ$이다. 즉 O에서 본 P의 방위각은 060°이다.

소문항 (ii)

속도의 연직 성분은

$$\dot{z} = 5\sqrt{5} - 10t,$$

이고, 이 값은 정확히 $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$일 때 0이다. 이것은 입자가 P에 있는 시각과 같으므로, 입자는 P에서 최고점(높이 $\frac{25}{4}\,\mathrm{m}$)에 있다.

소문항 (iii)

총알은 O에서 P까지 $350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 직선을 따라 날아가며(총알에 작용하는 중력은 무시한다), $OP = \frac{175}{4}\,\mathrm{m}$를 이동한다. 걸리는 시간은

$$T = \frac{175/4}{350} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s}.$$

생각해 보기 이 $\frac{1}{8}$초가 더 지난 뒤 입자는 어디에 있는가?

소문항 (ii)에 의해 P에서 입자의 연직 방향 속도는 0이므로, 그 점에서의 속도는 순수하게 수평 방향이고 크기는 $10\sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이다. 그다음 T초 동안 입자는 수평으로 $10\sqrt{5}\,T$만큼 움직이고 $\frac{1}{2}gT^2$만큼 떨어진다. $T = \frac{1}{8}$이므로

$$\text{수평 이동} = \frac{10\sqrt{5}}{8} \approx 2.80\,\mathrm{m}, \qquad \text{낙하} = 5\cdot\frac{1}{64} \approx 0.08\,\mathrm{m}.$$

이 둘은 서로 수직이므로 P로부터의 거리는

$$\sqrt{\frac{500}{64} + \frac{25}{4096}} = \frac{5\sqrt{1281}}{64} \approx 2.80\,\mathrm{m},$$

이고, 이는 요구된 대로 약 3 m이다. (낙하는 거의 영향이 없다. 답은 사실상 $10\sqrt{5}/8$이다.) 사수는 빗맞힌다.

검산

▶ $t = 0$일 때 공식은 $5\cdot 10 = 50\,\mathrm{m}$, 즉 거리 OB를 준다. 맞다.

- $|\overrightarrow{OP}|^2 = 37.5^2 + 21.65^2 + 6.25^2 = 1406.25 + 468.75 + 39.06 = 1914.06 = 43.75^2$이므로 P의 위치 벡터는 최단 거리와 일치한다.
- $|\mathbf{r}(t)|$를 수치적으로 훑어보면 $t \approx 1.118 = \frac{\sqrt{5}}{2}$에서 최솟값 43.75 m를 얻고, 입자를 P에서 0.125 s 동안 더 진행시키면 떨어진 거리는 2.796 m이다.

흔한 실수

- 수평 방향을 $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$($O$에서 멀어지는 방향)로 잡는 것. 그러면 입자는 결코 O의 북쪽을 지나가지 않고, 거리도 주어진 식대로 나오지 않는다.
- 방위각을 30°로 답하는 것. 이것은 동쪽에서 잰 각이지만, 방위각은 북쪽에서 시계 방향으로 잰다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 요격 문제(interception problem)의 간단한 형태이다. 움직이는 표적을 맞히려면 표적이 **있게 될** 곳을 겨누어야 하며, 이는 발사 방향과 시각 모두에 대하여 $|\mathbf{r}_{\text{target}}(t) - \mathbf{r}_{\text{bullet}}(t)| = 0$을 푸는 문제로 이어진다. $|\mathbf{r}(t)|$를 최소화하는 것은 궤도 문제와 충돌 문제에서 "최근접 거리(distance of closest approach)"의 바탕이 되는 아이디어이기도 하며, 이때 거리를 제곱하여 다항식을 얻는 것이 표준적인 첫 단계이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 벡터 운동학을 제대로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.