풀이

STEP II 2007, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 정역학

> **STEP II 2007, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q10

핵심 아이디어

이 문제는 정역학(statics) 문제이며, 까다로운 요소는 단 하나, 질량중심(centre of mass)의 위치뿐이다. G가 축 위의 어디에 있는지 알고 나면, 접촉점에 대한 모멘트(moment)를 취해 수직항력(normal reaction)과 마찰력(friction)을 모두 없애고 곧바로 P를 얻을 수 있다. 그다음 수평 방향으로 힘을 분해(resolving)하면 마찰력의 크기가 P와 같다는 것을 알 수 있고, 나머지는 마찰 법칙 $|F| \leq \mu R$가 해결해 준다. 절댓값(modulus)이 나타나는 까닭은 α에 따라 P가 밀어야 할 수도 있고 당겨야 할 수도 있기 때문이다.

풀이

모형

이 입체를 평면과 한 점 A에서 접하는 강체(rigid body)로 본다. 여기서 A는 평평한 밑면(원기둥의 자유단) 테두리의 가장 낮은 점이다. 그 밑면의 가장 높은 점을 B라 하면, AB는 길이가 $2r$인 지름이고 수평면과 각 α를 이룬다. 작용하는 힘은 다음과 같다. 질량중심 G에 작용하는 무게 W, A에 작용하는 수직항력 R와 마찰력 F, 그리고 B에 작용하는 수평력 P이다.

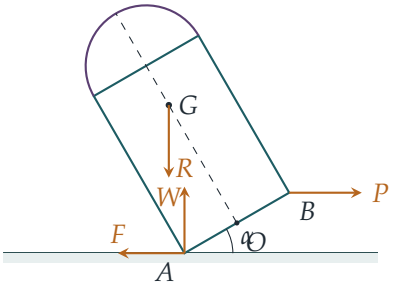
질량중심

밑면의 중심 O로부터 축을 따라 거리를 잰다. 원기둥의 부피는 $3\pi r^3$이므로 질량은 $3\pi r^3\rho$이고, 질량중심은 $\frac{3}{2}r$에 있다. 반구의 부피는 $\frac{2}{3}\pi r^3$이고 밀도는 3ρ이므로 질량은 $2\pi r^3\rho$이다. 반구의 질량중심은 평평한 면에서 $\frac{3}{8}r$만큼 바깥쪽에 있는데, 그 평평한 면이 $3r$에 있으므로 질

량중심은 $\frac{27}{8}r$에 있다. 전체 질량은 $5\pi r^3\rho$이고

$$OG = \frac{3\cdot\frac{3}{2}r + 2\cdot\frac{27}{8}r}{5} = \frac{\frac{9}{2}r + \frac{27}{4}r}{5} = \frac{9}{4}r.$$

따라서 G는 축 위에서 밑면으로부터 $\frac{9}{4}r$ 떨어진 곳에 있고, $W = 5\pi r^3\rho g$이다.



평형

A를 원점으로 하고, x축은 수평 방향(A에서 B의 발 쪽으로 향하는 방향), y축은 연직 위쪽으로 잡는다. P의 x 방향 수평 성분을 X라 하자. 따라서 X는 양수일 수도 음수일 수도 있다. 마찰력도 마찬가지로 x 방향 성분을 F라 하자.

밑면은 A에서 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 방향으로 뻗어 있으므로 $B = (2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$이고 $O = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$이다. 축은 밑면에 수직이고 입체 안쪽을 향하며, 그 방향은 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$이다. 따라서 G의 수평 좌표는

$$x_G = r\cos\alpha - \tfrac{9}{4}r\sin\alpha.$$

연직 방향으로 분해하면 $R = W$이다. 수평 방향으로 분해하면 $F + X = 0$이므로 $|F| = |X|$이다.

? 생각해 보기 어느 점에 대한 모멘트를 취해야 할까?

A에 대해 취한다. 그러면 R와 F의 모멘트는 0이 되고, W와 P만 남는다. 무게는 G를 지나 연직으로 작용하므로 A에 대한 모멘트는 Wx_G이다($x_G > 0$일 때 시계 방향). B에 작용하는 수평력은 높이 $2r\sin\alpha$에서 작용하므로 그 모멘트는 $X\cdot 2r\sin\alpha$이다($X < 0$일 때 반시계 방향, $X > 0$일 때 시계 방향). 시계 방향을 양의 방향으로 잡으면

$$Wx_G + 2r\sin\alpha\, X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = -\frac{W\left(r\cos\alpha - \frac{9}{4}r\sin\alpha\right)}{2r\sin\alpha} = W\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right),$$

이다. 여기서 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 양수인 $\sin\alpha$로 나누었다.

마찰 조건

평면이 거칠고 입체가 A에서 미끄러지지 않으므로 $|F| \le \mu R$이어야 한다. $|F| = |X|$와 $R = W > 0$을 이용하면

$$W\left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right| \le \mu W \quad\Longrightarrow\quad \mu \ge \left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right|,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

X의 부호는 P가 어느 방향으로 작용하는지 알려 준다. $\tan\alpha > \frac{4}{9}$이면 G는 A를 기준으로 B의 반대쪽에 있어서 입체가 저절로 뒤로 넘어지려 하므로, P는 B를 입체에서 멀어지는 쪽으로 당겨야 한다. $\tan\alpha < \frac{4}{9}$이면 P는 밀어야 한다. 어느 경우든 마찰력은 P와 반대 방향이며, 절댓값이 두 경우를 모두 포괄한다.

검산

- $\tan\alpha = \frac{4}{9}$이면 $x_G = 0$이다. 즉 G가 A의 바로 위에 있어 입체가 저절로 균형을 이루고, $P = 0$이며 마찰력이 전혀 필요하지 않다. 부등식은 $\mu \ge |\frac{9}{8} - \frac{9}{8}| = 0$을 주므로 당연한 결과와 일치한다.
- $\alpha = 45^\circ$일 때 부등식은 $\mu \ge \frac{5}{8}$이다.
- 수치적으로, 입체를 얇은 원판들로 잘라 계산하면 전체 질량 $5\pi\rho r^3$과 $OG = 2.2500r$를 얻는다. 또 10 000개의 무작위 α 값에 대해 세 평형 방정식을 직접 풀면 매번 $|F|/R$가 $|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha|$와 같게 나온다.

흔한 실수

- 반구의 밀도가 세 배라는 것을 잊고 그 질량을 $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$로 잡는 실수. 이렇게 하면 G의 위치가 달라지고 상수 $\frac{9}{8}$도 바뀐다.
- 반구의 질량중심 $\frac{3}{8}r$를 높이 $3r$에 있는 반구 자신의 평평한 면이 아니라 원기둥의 밑면에서부터 재는 실수.
- P(또는 마찰력)의 방향을 미리 가정해 버려서 절댓값을 놓치는 실수. 결과는 P가 어느 방향으로 작용하든 성립해야 한다.

STEP 너머

복합체의 질량중심을 구하는 것은 부피 적분(volume integral)의 이산적인 그림자이다. 즉 $\bar{\mathbf{r}} = \int \rho\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}V \big/ \int \rho\,\mathrm{d}V$이며, 애초에 반구의 $\frac{3}{8}r$도 이렇게 유도된다. 대학 1학년 역학에서 이것

은 강체 이론으로 발전하는데, 거기서는 $\mathbf{r}$ 대신 r^2을 넣은 같은 적분이 관성 모멘트(moment of inertia)를 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 개념을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.