풀이

STEP II 2007, 문제 1

순수수학 • 이항 근사

> **STEP II 2007, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q1

핵심 아이디어

이항급수(binomial series)는 작은 양이 정말로 작을 때에만 빠르게 수렴(converge)한다. 따라서 이 문제의 핵심은 무리수 거듭제곱근(surd)을 $\sqrt{1+\text{아주 작은 수}}$의 간단한 유리수 배로 바꾸어 쓰는 데 있다. 이를 위해 3 또는 6을 곱했을 때 10의 거듭제곱 바로 옆에 오는 완전제곱수(perfect square)(또는 세제곱수)를 찾는다. 그러면 k는 100(또는 1000)에 비해 작고, 몇 개의 항만으로도 필요한 정확도를 얻을 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$x = \frac{k}{100}$일 때, $(1+x)^{1/2}$의 이항급수의 계수(coefficient)는 다음과 같다.

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

$x = k/100$을 대입하면

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{k}{200} - \frac{k^2}{80\,000} + \frac{k^3}{16\,000\,000}.$$

(a) $k = 8$이면 좌변은 $\sqrt{1.08}$이고, 요점은 $108 = 3\times 36$이라는 것이다.

$$\sqrt{1.08} = \frac{\sqrt{108}}{10} = \frac{6\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{1.08}.$$

급수로 계산하면

$$\sqrt{1.08} \approx 1 + 0.04 - 0.0008 + 0.000032 = 1.039232,$$

이고, 따라서

$$\sqrt{3} \approx \frac{5}{3} \times 1.039232 = 1.7320533\ldots \approx 1.73205 \text{ (소수점 아래 다섯째 자리까지)}.$$

(b)

? **생각해 보기** 어떤 k 값에서 $1 + \frac{k}{100}$이 깔끔한 제곱수의 6배가 되는가?

k가 작아지도록, $6m^2$이 100에 가까운 정수 m에 대해 $100 + k = 6m^2$이 되게 하고 싶다. $6 \times 16 = 96$이므로 $m = 4$, $k = -4$로 잡는다.

$$\sqrt{0.96} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{0.96}.$$

$k = -4$이면 첫째 항 이후의 모든 항이 음수이다.

$$\sqrt{0.96} \approx 1 - 0.02 - 0.0002 - 0.000004 = 0.979796,$$

따라서

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \times 0.979796 = 2.44949 \text{ (소수점 아래 다섯째 자리까지)}.$$

이 k는 (a)에서의 값의 절반 크기이므로, 여기서는 무시한 항들이 더욱 작다. ($1.5 = 6/4$에서 나오는 $k = 50$ 같은 값으로도 $\sqrt{6}$을 정확히 나타낼 수 있지만, $x = \frac{1}{2}$이면 급수가 너무 느리게 수렴하여 소수점 아래 다섯째 자리까지 얻기에는 턱없이 부족하다.)

소문항 (ii)

처음 두 항으로 근사하면

$$\left(1 + \frac{k}{1000}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{k}{3000}.$$

? **생각해 보기** 3을 곱했을 때 1000보다 조금 큰 값이 되는 세제곱수는 무엇인가?

k가 작으면서 $1000 + k = 3m^3$이어야 한다. $1000/3 \approx 333$ 근처의 세제곱수는 $6^3 = 216$과 $7^3 = 343$이고, $3 \times 343 = 1029$는 1000에 매우 가깝다. 따라서 $k = 29$로 잡는다.

$$\sqrt[3]{1.029} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 7^3}}{10} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{1.029}.$$

두 항 근사를 사용하면

$$\sqrt[3]{3} \approx \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{3000}\right) = \frac{10}{7} \cdot \frac{3029}{3000} = \frac{3029}{2100},$$

이고, 이것이 구하는 근사이다.

검산

계산기로 구하면 $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$, $\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$이므로, 두 답 모두 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치한다. 소문항 (ii)의 경우 $3029/2100 = 1.44238\ldots$이고 $\sqrt[3]{3} = 1.44225\ldots$이다. 약 1.3×10^{-4}인 오차는 무시한 첫 항의 크기 $\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{29}{1000}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4}$와 맞아떨어지므로, 이 근사는 참값보다 약간 크다.

흔한 실수

- 셋째 계수를 잘못 구하는 것: $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)/6 = +\frac{1}{16}$이지, $-\frac{1}{16}$이 아니다.
- 급수의 값을 구한 뒤 $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{10}{7}$을 다시 곱하는 것을 잊는 것.
- (b)에서 $k = 50$처럼 큰 k를 고르는 것. 이 경우 서너 개의 항으로는 전혀 부족하다.

STEP 너머

몇 개의 항이 필요한지는 결국 테일러 급수(Taylor series)의 나머지항(remainder)을 한정하는 문제로 귀결된다. 라그랑주(Lagrange) 꼴의 나머지항을 이용하면 이 근사들이 소수점 아래 다섯째 자리까지 정확하다는 것을 그저 믿는 것이 아니라 증명할 수 있다. 급수가 빠르게 수렴하는 영역으로 크기를 조정하는 이 기법은 실제로 계산기와 컴퓨터 라이브러리가 거듭제곱근과 로그를 계산하는 방법이기도 하다. 테일러 급수와 그 나머지항의 이론에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.