풀이

STEP I 2007, 문제 9

역학 • 빗면 위의 최대 정지 마찰

STEP I 2007, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

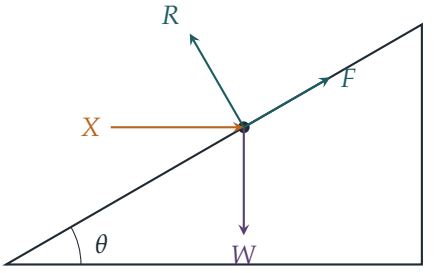
step.maths.org/questions/07-s1-q9

핵심 아이디어

이 문제는 한계 마찰(limiting friction)의 두 경우를 다루며, 두 경우는 마찰력의 방향만 다르다. 각 경우에 힘을 면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해(resolve)하고 수직항력(normal reaction)을 소거하면, 각 수평력이 W에 삼각함수 식의 비를 곱한 꼴로 나타난다. 한 식을 다른 식으로 나누면 W가 사라지고 k, μ, θ만의 관계식이 남는다. 그러면 부등식(inequality)은 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$가 결코 $\frac{1}{2}$를 넘을 수 없다는 사실에서 나온다.

풀이

물체를 입자(particle)로 모형화하고, 두 경우 모두 마찰이 한계 상태, 즉 $F = \mu R$라고 가정한다. 계산을 간결하게 하기 위해 $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$로 쓴다.



수평력은 입자를 면 쪽으로 밀므로, 빗면 위쪽 방향으로 성분 Xc, 면 안쪽 방향으로 성분 Xs를 가진다. 무게는 빗면 아래쪽 방향으로 성분 Ws, 면 안쪽 방향으로 성분 Wc를 가진다.

막 미끄러져 내려가려는 경우: 힘 X

입자가 막 아래로 움직이려는 상태이므로, 마찰력 μR는 (그림처럼) 면을 따라 **위쪽**으로 작용한다. 면에 수직인 방향, 그다음 면에 나란한 방향으로 힘을 분해하면

$$R = Wc + Xs, \qquad Xc + \mu R = Ws.$$

R를 대입하면

$$Xc + \mu Wc + \mu Xs = Ws \quad \Longrightarrow \quad X(c + \mu s) = W(s - \mu c). \tag{1}$$

막 미끄러져 올라가려는 경우: 힘 kX

이제 입자가 막 위로 움직이려는 상태이므로, 마찰력은 면을 따라 **아래쪽**으로 작용한다. 마찬가지로

$$R' = Wc + kXs, \qquad kXc = Ws + \mu R',$$

이므로

$$kX(c - \mu s) = W(s + \mu c). \tag{2}$$

? **생각해 보기** 여기서 눈에 보이는 식들로 마음대로 나누어도 될까?

물리적 상황을 생각하면 그렇다. 입자가 미끄러져 내려가지 않게 하려면 양의 힘 X가 **필요하므로**, 이 힘이 없으면 입자는 미끄러진다. 즉 $\tan\theta > \mu$, 다시 말해 $s - \mu c > 0$이다. 그러면 (1)에서 $X > 0$이고, $c + \mu s > 0$은 어차피 성립한다. 수평으로 미는 힘이 입자를 빗면 위로 밀어 올릴 수 있으려면, (2)에서 $c - \mu s > 0$, 즉 $\tan\theta < 1/\mu$이어야 한다. 이 둘을 합치면 $\mu < \tan\theta < 1/\mu$이고, 특히 $\mu < 1$이다. 이 사실은 마지막에 필요하다.

관계식

(2)를 (1)로 나누면 X와 W가 모두 사라진다.

$$k\,\frac{c - \mu s}{c + \mu s} = \frac{s + \mu c}{s - \mu c} \quad \Longrightarrow \quad k(c - \mu s)(s - \mu c) = (s + \mu c)(c + \mu s).$$

양변을 각각 전개하고 $s^2 + c^2 = 1$을 이용하면

$$(c - \mu s)(s - \mu c) = sc - \mu c^2 - \mu s^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc - \mu,$$
$$(s + \mu c)(c + \mu s) = sc + \mu s^2 + \mu c^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc + \mu.$$

따라서 $k(1 + \mu^2)sc - k\mu = (1 + \mu^2)sc + \mu$이고, 이를 정리하면

$$(k - 1)(1 + \mu^2)\sin\theta\cos\theta = \mu(k + 1),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

부등식

우변은 양수이고($\mu > 0, k > 0$이므로), θ가 예각이면 $(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta$도 양수이다. 따라서 $k > 1$이다. (이는 놀라운 일이 아니다. 입자를 밀어 올리는 데에는 붙잡아 두는 것보다 큰 힘이 든다.) 이제

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \le \tfrac{1}{2},$$

이고, $(k-1)(1+\mu^2) > 0$이므로 이 부등식의 양변에 이를 곱할 수 있다.

$$\mu(k+1) = (k-1)(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta \le \tfrac{1}{2}(k-1)(1+\mu^2).$$

양변을 2배 하고 k가 있는 항을 모으면

$$2\mu k + 2\mu \le k(1+\mu^2) - (1+\mu^2) \quad\Longrightarrow\quad k(1-2\mu+\mu^2) \ge 1+2\mu+\mu^2,$$

즉 $k(1-\mu)^2 \ge (1+\mu)^2$이다. 앞에서 $\mu < 1$임을 보였으므로 $(1-\mu)^2 > 0$이고, 부등호 방향을 바꾸지 않고 이것으로 나눌 수 있다.

$$k \ge \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}.$$

등호는 정확히 $\sin 2\theta = 1$, 즉 $\theta = 45^\circ$일 때 성립한다.

> ? **생각해 보기** 마지막 단계 전에 왜 $\mu < 1$임을 알아야 할까?

$\mu = 1$이면 0으로 나누게 된다(그리고 바로 앞 줄은 $0 \ge 4$가 되어 거짓이다). $\mu > 1$이면 나누는 것 자체는 여전히 가능하지만, θ에 대한 조건이 이미 성립하지 않는다. 물리적으로 보면, $\mu \ge 1$일 때 두 조건 $\tan\theta > \mu \ge 1$과 $\tan\theta < 1/\mu \le 1$은 서로 모순이다. 입자를 붙잡아 둘 필요가 아예 없거나, 어떤 수평력으로도 입자를 빗면 위로 움직이기 시작하게 할 수 없다. 따라서 문제에는 $\mu < 1$이 암묵적으로 전제되어 있다.

검산

- $\mu = \frac{1}{2}$, $\theta = 45^\circ$로 놓으면 $s = c = 1/\sqrt{2}$이다. (1)과 (2)에서 $X = W\cdot\frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}W$, $kX = W\cdot\frac{3/2}{1/2} = 3W$이므로 $k = 9 = (1.5/0.5)^2$이고, 이는 등호가 성립하는 경우이다. 대신 $\theta = 60^\circ$로 놓으면 같은 식에서 $k \approx 25.2 > 9$를 얻는다.
- $\mu \to 0$이면 $X = kX = W\tan\theta$이고 $k \to 1$이 되어, 항등식(양변 모두 0)과 하한 1에 모두 들어맞는다.
- $\mu \in (0,1)$과 허용되는 θ를 무작위로 10^5번 골라 항등식과 부등식을 수치적으로 확인한 결과, 성립하지 않는 경우는 없었다.

흔한 실수

- $R = W\cos\theta$로 놓는 것. 수평력도 입자를 면 쪽으로 누르므로 수직항력에 $X\sin\theta$를 더 한다.
- 두 경우에서 마찰력의 방향을 같게 두는 것. 마찰력은 항상 막 일어나려는 운동을 방해하는 방향으로 작용한다.
- $(1-\mu)^2$이 왜 양수인지(그리고 0이 아닌지) 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

이 문제를 깔끔하게 보는 방법은 $\tan\lambda = \mu$인 **마찰각**(angle of friction) λ를 이용하는 것이다. 수직항력과 한계 마찰력은 법선과 각 λ를 이루는 하나의 힘으로 합쳐지고, (1)과 (2)는 $X = W\tan(\theta-\lambda)$, $kX = W\tan(\theta+\lambda)$가 된다. 따라서 $k = \tan(\theta+\lambda)/\tan(\theta-\lambda)$이고, 앞의 하한은 이 비가 $\theta = 45^\circ$에서 가장 작다는 명제이다. 이런 종류의 마찰각 논증과 "마찰원뿔(friction cone)"의 개념은 대학 정역학과 접촉 이론에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 과정에서 기대하는 수준의 세심함으로 마찰과 힘의 분석을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.