풀이

STEP I 2007, 문제 8

순수수학 • 삼차곡선의 접함

> **STEP I 2007, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q8

핵심 아이디어

두 곡선이 어떤 점에서 접한다(touch)는 것은 교점을 구하는 방정식이 그 점에서 중근(repeated root)을 갖는다는 것과 정확히 같다. 따라서 두 삼차식의 차를 살펴보고 $(x-2)^2$이라는 인수가 나오리라 예상한다. a가 들어 있는 항들의 계수 $1, -6, 12, -8$은 $(x-2)^3$의 이항계수(binomial coefficients)이며, 이를 알아차리면 인수분해(factorisation)와 그래프 그리기가 모두 훨씬 쉬워진다.

풀이

$(2,8)$에서 접함과 다른 교점

a가 들어 있는 항끼리 묶으면

$$ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a = a(x-2)^3, \qquad \text{이므로} \qquad y = a(x-2)^3 + 12x - 16. \quad (*)$$

$y = x^3$과의 교점은 다음 방정식의 근이다.

$$a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 = 0.$$

이제 $x^3 - 12x + 16$은 $x = 2$에서 0이 되고, 나눗셈을 하면 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$를 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned} a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 &= a(x-2)^3 - (x-2)^2(x+4) \\ &= (x-2)^2[(a-1)x - 2a - 4]. \end{aligned}$$

$x = 2$에서 두 곡선은 모두 $(2,8)$을 지나고, 인수 $(x-2)^2$은 $x = 2$가 교점 방정식의 중근임을 보여 준다. 같은 말이지만 기울기(gradient)가 일치한다고 해도 된다. $(*)$에

서 $y' = 3a(x-2)^2 + 12$이고, 이는 $x = 2$에서 12이며, 그 점에서 $y = x^3$의 기울기도 $3 \cdot 2^2 = 12$이다. 그러므로 a의 값에 관계없이 두 곡선은 $(2, 8)$에서 접한다.

다른 교점은 $(a-1)x = 2a + 4$에서 나온다.

- $a \neq 1$이면 $x = \dfrac{2a+4}{a-1}$이고, 이 값은 결코 2가 아니다(2가 되려면 $2a + 4 = 2a - 2$여야 한다). 따라서 다른 교점은 정확히 하나이며, 그 점은

$$\left(\frac{2a+4}{a-1}, \left(\frac{2a+4}{a-1} \right)^3 \right).$$

- $a = 1$이면 괄호 안은 상수 -6이 되므로 다른 교점은 없다.

? **생각해 보기** 어느 곡선이 위에 있고, 어디에서 그런가?

인수분해가 이 질문에 공짜로 답해 준다. $(x-2)^2 \geq 0$이므로 $(*)$에서 x^3을 뺀 값의 부호는 일차 인수 $(a-1)x - 2a - 4$의 부호와 같다. 이것으로 다른 교점의 어느 쪽에서 곡선 $(*)$가 $y = x^3$보다 위에 있는지 알 수 있으며, 그래프를 그리는 데 필요한 것은 대부분 이것이다.

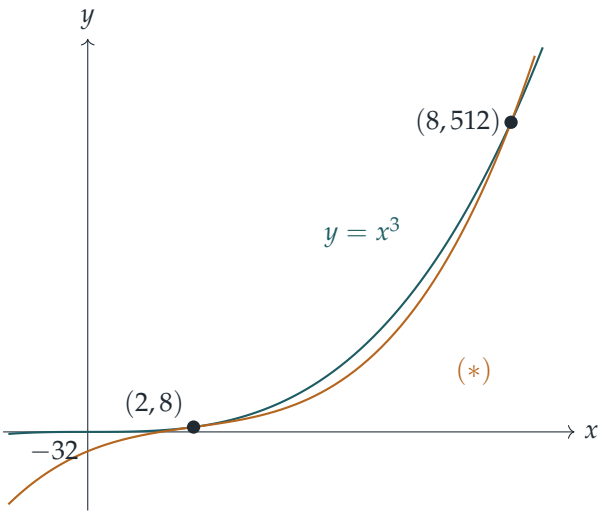
세 그래프 모두에서 $(*)$는 $(2, 8)$에서 기울기가 12인 변곡점(point of inflection)을 갖는다. $a \neq 0$일 때 $y'' = 6a(x-2)$의 부호가 그 점에서 바뀌기 때문이다. 따라서 $(*)$와 $y = x^3$은 $(2, 8)$에서 접선(tangent) $y = 12x - 16$을 공유한다. 그 점에서 $y = x^3$은 아래로 볼록(concave up)이지만 $(*)$는 그렇지 않다.

소문항 (i): $a = 2$

이때 $y = 2(x-2)^3 + 12x - 16$이고

$$y - x^3 = (x-2)^2(x-8).$$

다른 교점은 $(8, 512)$이다. 곡선 $(*)$는 $x < 8$에서 $y = x^3$보다 아래에 있고($x = 2$에서 접함), $x > 8$에서는 위에 있다. 기울기 $6(x-2)^2 + 12$가 항상 양수이므로 이 곡선은 증가하며 극점(turning points)이 없다. y축과는 $(0, -32)$에서 만나고, x축과는 $x \approx 1.37$ 근처에서 한 번 만난다.



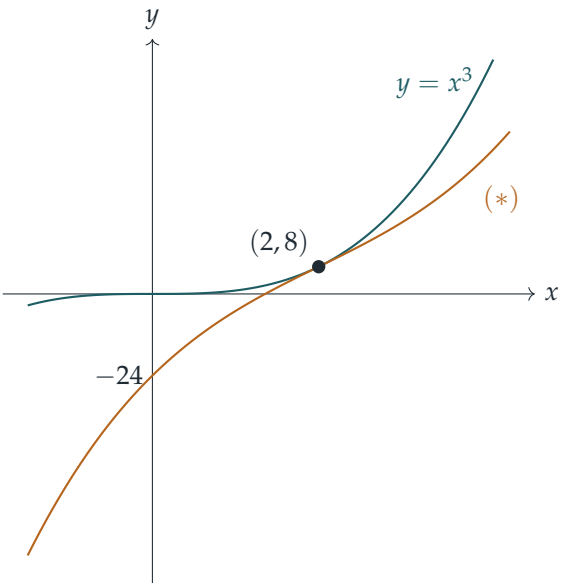
(세로 축척을 크게 줄였기 때문에 $(2,8)$에서 접하는 부분이 평평해 보인다. 두 곡선은 그 점에서 접선을 공유한다.)

소문항 (ii): $a = 1$

이때 $y = (x-2)^3 + 12x - 16 = x^3 - 6x^2 + 24x - 24$이고,

$$y - x^3 = -6(x-2)^2 \leq 0.$$

따라서 $(*)$는 접점 $(2,8)$을 제외한 모든 곳에서 $y = x^3$보다 아래에 있고, 다른 교점은 없다. 두 곡선 사이의 간격 $6(x-2)^2$은 $x = 2$에서 어느 방향으로든 멀어질수록 커진다. 기울기 $3(x-2)^2 + 12$가 항상 양수이므로 $(*)$는 증가한다. y축과는 $(0,-24)$에서 만나고, x축과는 $x \approx 1.36$ 근처에서 한 번 만난다.



소문항 (iii): $a = -2$

이제 다른 교점은 $x = \dfrac{-4+4}{-3} = 0$이므로 원점 $(0,0)$이고,

$$y - x^3 = (x-2)^2(-3x) = -3x(x-2)^2.$$

따라서 $(*)$는 $x < 0$에서 $y = x^3$보다 위에, $x > 0$에서는 아래에 있으며, $(2,8)$에서 접한다.

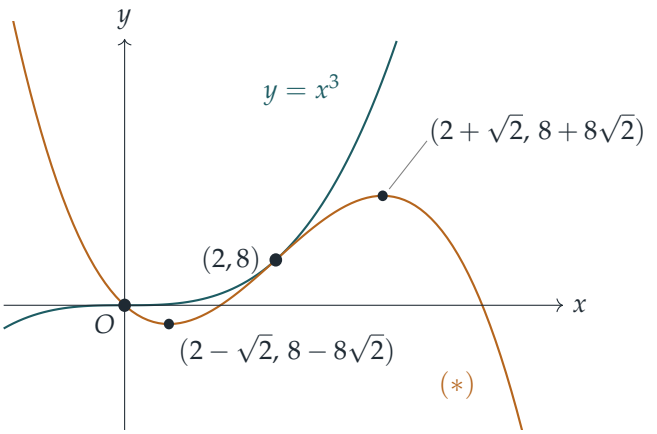
전개하면 $y = -2(x-2)^3 + 12x - 16 = -2x^3 + 12x^2 - 12x = -2x(x^2 - 6x + 6)$이고, 이 곡선은 $x = 0$과 $x = 3 \pm \sqrt{3}$(약 1.27과 4.73)에서 x축과 만난다. 기울기는

$$y' = -6(x-2)^2 + 12,$$

이고, 이는 $(x-2)^2 = 2$, 즉 $x = 2 \pm \sqrt{2}$일 때 영이 된다. 대입하면

$$x = 2 - \sqrt{2}: \quad y = 8 - 8\sqrt{2} \approx -3.31 \quad \text{(극소)},$$
$$x = 2 + \sqrt{2}: \quad y = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19.3 \quad \text{(극대)}.$$

최고차항의 계수(leading coefficient)가 음수이므로 $x \to -\infty$일 때 $y \to +\infty$이고 $x \to +\infty$일 때 $y \to -\infty$이다. 원점에서 $(*)$의 기울기는 -12이고 $y = x^3$의 기울기는 0이므로, 두 곡선은 그 점에서 실제로 교차한다.



검산

- $x = 2$에서 $(*)$는 모든 a에 대해 $a \cdot 0 + 24 - 16 = 8$을 주고, $y' = 12$이므로 $y = x^3$과 일치한다.
- $a = 2, x = 8$일 때 간단한 꼴에 대입하면 $2 \cdot 6^3 + 96 - 16 = 512 = 8^3$이므로 점 $(8, 512)$가 확인된다.
- $a = 0$일 때 $(*)$는 접선 $y = 12x - 16$이고, 공식은 다른 교점을 $x = -4$로 준다. 실제로 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$이다.
- 무작위로 고른 수천 개의 유리수 a와 x에 대해 인수분해를 정확히 확인했고, 소문항 (iii)의 극값 $8 \pm 8\sqrt{2} \approx 19.31, -3.31$을 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- $a = 1$인 경우를 빠뜨리는 것. 이때는 다른 교점이 없으므로 다른 교점의 공식이 성립하지 않는다.
- 두 곡선이 모두 $(2, 8)$을 지난다는 것만 보이는 것. 접하려면 기울기도 같아야 하며, 같은 말로 중근이 있어야 한다.
- 소문항 (iii)에서 두 곡선이 원점에서 접하는 것처럼 그리는 것. 두 곡선은 그 점에서 서로 다른 기울기로 교차한다.

STEP 너머

$f(x) - g(x)$의 중근은 접함을 대수적으로 비춘 그림자이다. 즉, 그 점에서 두 곡선은 일차까지 일치한다. 이를 더 밀고 나가면 접촉의 차수(order of contact)는 도함수가 몇 개까지 일치하는지를 세는 것이고, 이것이 테일러(Taylor) 다항식(Taylor polynomials)의 바탕이 되는 아이디어이다. 테일러 다항식은 한 점에서 함수와 가능한 가장 높은 차수로 접촉하는 다항식이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 테일러 정리를 꼼꼼하게 전개한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 그래프 그리기 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.