풀이

STEP I 2007, 문제 7

순수수학 • 두 직선 사이의 거리

> **STEP I 2007, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q7

핵심 아이디어

각 직선 위의 일반적인 점을 적고, 두 점을 빼서 그 길이를 제곱한다. 그러면 D^2은 두 매개변수에 대한 이차식(quadratic)이 된다. 요령은 이 이차식을 제곱의 합(sum of squares)으로 나타내는 것이다. 제곱의 합은 각 제곱이 가능한 한 작을 때 가장 작기 때문이다. 소문항 (ii)에서도 같은 방법이 통하며, k의 값에 따라 제곱들이 어떻게 나뉘는지가 기하학적 상황을 알려 준다.

풀이

소문항 (i)

L_1 위의 일반적인 점은 $P = (1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-3\lambda)$이고 L_2 위의 일반적인 점은 $Q = (4+\mu,\ -2+2\mu,\ 9-2\mu)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+\mu-2\lambda \\ -2+2\mu-2\lambda \\ 7-2\mu+3\lambda \end{pmatrix}$$

이고

$$D^2 = (3+\mu-2\lambda)^2 + (-2+2\mu-2\lambda)^2 + (7-2\mu+3\lambda)^2.$$

각 항의 계수를 모으면 다음과 같다.

$$\mu^2: \quad 1+4+4=9, \qquad \lambda^2: \quad 4+4+9=17, \qquad \lambda\mu: \quad -4-8-12=-24,$$
$$\mu: \quad 6-8-28=-30, \qquad \lambda: \quad -12+8+42=38, \qquad \text{상수항}: \quad 9+4+49=62,$$

따라서 $D^2 = 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62$이다.

이제 제시된 식을 전개한다.

$$\begin{aligned}(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36 &= (9\mu^2+16\lambda^2+25-24\lambda\mu-30\mu+40\lambda)\\ &\quad+(\lambda^2-2\lambda+1)+36\\ &= 9\mu^2+17\lambda^2-24\lambda\mu-30\mu+38\lambda+62.\end{aligned}$$

두 식이 일치하므로

$$D^2=(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

생각해 보기 왜 두 제곱을 동시에 0으로 만들 수 있을까?

각 제곱은 0 이상이므로, 모든 λ와 μ에 대하여 $D^2\geq 36$이다. 등호가 성립하려면 $\lambda=1$이고 $3\mu=4\lambda+5=9$, 즉 $\mu=3$이어야 한다. 이 두 조건은 서로 모순되지 않으므로(첫째 조건이 λ를 정하고, 그다음 둘째 조건이 μ를 정한다) $D^2=36$은 실제로 달성된다. 따라서 두 직선 사이의 최소 거리는

$$D_{\min}=6,$$

이고, 이는 다음에서 달성된다.

$$\lambda=1:\ P=(3,\,2,\,-1)\quad \text{직선}L_1,\qquad \mu=3:\ Q=(7,\,4,\,3)\quad \text{직선}L_2.$$

검산하면, $\overrightarrow{PQ}=(4,2,4)$의 길이는 $\sqrt{16+4+16}=6$이고, 이 벡터는 두 방향벡터(direction vector)에 모두 수직(perpendicular)이다. 실제로 $(4,2,4)\cdot(2,2,-3)=8+4-12=0$이고 $(4,2,4)\cdot(1,2,-2)=4+4-8=0$이다. 이것은 두 직선을 잇는 가장 짧은 선분에 대해 우리가 기대하는 성질 그대로이다.

소문항 (ii)

L_3 위의 일반적인 점은 $P=(2,\,3+\alpha,\,5)$이고 L_4 위의 일반적인 점은 $Q=(3+4k\beta,\,3+(1-k)\beta,\,-2-3k\beta)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1+4k\beta\\(1-k)\beta-\alpha\\-7-3k\beta\end{pmatrix}$$

이고

$$\begin{aligned}D^2&=(1+4k\beta)^2+\left((1-k)\beta-\alpha\right)^2+(7+3k\beta)^2\\&=\left((1-k)\beta-\alpha\right)^2+25k^2\beta^2+50k\beta+50\\&=\left((1-k)\beta-\alpha\right)^2+25(k\beta+1)^2+25,\end{aligned}$$

이다. 왜냐하면 $(1+4k\beta)^2+(7+3k\beta)^2 = 1+8k\beta+16k^2\beta^2+49+42k\beta+9k^2\beta^2$이기 때문이다.

β가 무엇이든, α는 다른 곳에는 나타나지 않으므로 $\alpha=(1-k)\beta$로 택하여 첫째 제곱을 0으로 만들 수 있다. 그러므로 문제는 $25(k\beta+1)^2$을 얼마나 작게 만들 수 있느냐이며, 바로 여기서 두 경우가 갈린다.

> **?** **생각해 보기** $k=0$이면 무엇이 달라지는가?

$k\neq 0$이면 $\beta=-1/k$로 택할 수 있고, 그러면 $k\beta+1=0$이 된다. $k=0$이면 β가 무엇이든 항 $25(k\beta+1)^2$은 25에 고정된다.

경우 $k\neq 0$**.** 모든 제곱은 음이 아니므로 $D^2\geq 25$이고, 등호는 $\beta=-1/k$, $\alpha=(1-k)\beta=(k-1)/k$에서 성립한다. 최소 거리는

$$D_{\min}=5,$$

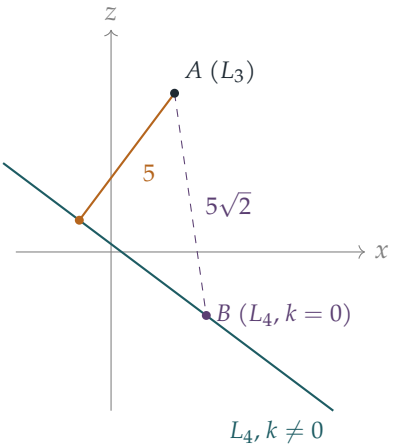
이며, 이는 (0이 아닌) k의 값에 관계없다. 가장 가까운 두 점은 $P=(2,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 5)$와 $Q=(-1,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 1)$이고, $\overrightarrow{PQ}=(-3,0,-4)$의 길이는 5이다. $D_{\min}>0$이므로 두 직선은 만나지 않으며, $k\neq 0$일 때 방향 $(0,1,0)$과 $(4k,1-k,-3k)$는 평행(parallel)하지 않다(둘째 벡터의 첫째 성분과 셋째 성분이 모두 영이 되지는 않는다). 따라서 두 직선은 **꼬인 위치**(skew)에 있으며, 5는 두 직선의 유일한 공통수선(common perpendicular)의 길이이다.

경우 $k=0$**.** 이때 L_4의 방향은 $(0,1,0)$으로 L_3과 같다. 즉 두 직선은 **평행**하다. 여기서 $D^2=(\beta-\alpha)^2+50$이고, 이는 $\alpha=\beta$일 때마다 최소가 되므로

$$D_{\min}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

이다. 이 값은 무수히 많은 점의 쌍에서 달성된다. 한 직선 위의 아무 점과, 다른 직선 위에서 그 점의 바로 맞은편에 있는 점(같은 y좌표를 갖는 점)이면 된다. 이는 평행한 두 직선 사이의 일정한 거리일 뿐이다.

기하학적 해석. 두 직선은 y축 방향으로 똑바로 내려다볼 때, 즉 xz평면 위로 사영(projection)할 때 가장 잘 보인다. L_3은 y축에 평행하므로 한 점 $A=(2,5)$로 사영되며, L_3에 수직인 방향의 거리는 이 사영으로 변하지 않는다. $k\neq 0$이면 L_4는 $(3,-2)$를 지나고 방향이 $(4,-3)$인 직선으로 사영되며($1-k$ 성분은 사라진다), A에서 이 직선까지의 거리는 $|1\cdot(-3)-(-7)\cdot 4|/5=5$로 k와 무관하다. $k=0$이면 L_4는 한 점 $B=(3,-2)$로 사영되고, 거리는 $AB=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$이다.



따라서 답은 $k \neq 0$일 때 5(꼬인 위치의 두 직선이며, 가장 짧은 선분은 하나뿐이고 두 직선에 모두 수직이다)이고, $k = 0$일 때 $5\sqrt{2}$(평행한 두 직선이며, 거리는 어디서나 같다)이다.

검산

소문항 (i)에서 $\lambda = 1, \mu = 3$을 대입하면 거리가 6인 두 점을 얻고, $\overrightarrow{PQ}$는 두 직선에 모두 수직이다. (λ, μ)의 격자 위에서 수치적으로 탐색해 보아도 $D^2 = 36$보다 작은 값은 나오지 않았다. 소문항 (ii)에서 $k = 0.001,\ 0.3,\ 1,\ -2,\ 5$에 대하여 D^2을 수치적으로 최소화하면 매번 25가 나왔고, $k = 0$일 때는 50이 나왔다. $D_{\min}$이 $k = 0$에서 5에서 $5\sqrt{2}$로 갑자기 바뀐다는 점에 주목하자. k가 아주 작으면 가장 가까운 점들은 $\beta = -1/k$ 근처, 즉 아주 멀리 있으므로 극한이 연속일 필요는 없다.

흔한 실수

- 두 제곱이 **동시에** 0이 될 수 있는지 확인하는 것을 잊는 실수. 여기서는 가능하지만, 이를 가정하지 말고 분명히 밝혀야 한다.
- $k = 0$일 때 k로 나누는 실수. $\beta = -1/k$라는 선택은 $k \neq 0$일 때만 가능하며, 바로 이 때문에 두 경우가 생긴다.
- $k \neq 0$일 때의 두 직선을 "만난다"고 하는 실수. 두 직선은 평행하지 않지만 $D_{\min} = 5 > 0$이므로 꼬인 위치에 있다.

STEP 너머

여러 변수에서 완전제곱식을 만드는 것(completing the square)은 이차형식(quadratic forms) 이론의 출발점이다. D^2을 제곱의 합으로 나타내는 것은 대칭행렬(symmetric matrix)을 대각화(diagonalising)하는 것이고, 최솟값을 구하는 것은 최소제곱(least squares) 문제이다. 마지막에 확인한 수직 조건은 최소제곱법의 "정규방정식"(normal equations)이며, 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 거리에 대한 일반 공식 $|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$도 같은 기하학에서 나온다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 사영과 최소제곱을 훌륭하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.