풀이

STEP I 2007, 문제 6

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP I 2007, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q6

핵심 아이디어

두 소문항 모두 거듭제곱의 차로 시작하며, $x-y$는 그 모든 식의 인수(factor)이다. 이 인수를 약분하면($d \neq 0$이므로 가능하다) x와 y에 대한 대칭식(symmetric expression)이 남는다. 이 식과 $x-y=d$를 함께 쓰면 x와 y가 결정된다. 정수해(integer solution)를 얻으려면 공식의 값이 정수가 되도록 d를 고른다. 소문항 (ii)에서는 이것이 제곱근을 유리수(rational number)로 만드는 것을 뜻한다.

풀이

소문항 (i)

좌변을 인수분해하면

$$(x-y)(x+y) = (x-y)^3.$$

$x-y=d\neq 0$이므로 $x-y$로 나누어 $x+y=(x-y)^2=d^2$을 얻는다. 이 식과 $x-y=d$를 더하고 빼면

$$x=\frac{d^2+d}{2}=\frac{d(d+1)}{2}, \qquad y=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}.$$

정수 쌍을 구하기 위해 $x=\sqrt{m}, y=\sqrt{n}$으로 놓는다. 그러면 $x^2-y^2=m-n$이고, 요구되는 조건은 정확히 $x^2-y^2=(x-y)^3$이다. $m>n$이므로 0이 아닌 $d=\sqrt{m}-\sqrt{n}$에 대해 다음을 얻는다.

$$m=\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)^2, \qquad n=\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2.$$

d가 양의 정수이면 $d(d\pm 1)$은 연속한 정수의 곱이므로 짝수이다. 그러면 $\sqrt{m}$과 $\sqrt{n}$은 정수이고, 따라서 m과 n도 정수이다. 또한 $d>0$이므로 $m>n$이다. $n>100$이어야 하므로

$\frac{1}{2}d(d-1) > 10$이어야 한다. $d = 5$이면 $\frac{1}{2}d(d-1) = 10$이 되어 충분하지 않으므로 $d = 6$으로 잡는다.

$$\sqrt{m} = 21, \quad \sqrt{n} = 15, \qquad m = 441, \quad n = 225.$$

검산: $m - n = 216 = 6^3 = (21-15)^3$. ($d = 7$일 때 $m = 784, n = 441$과 같은 다른 답도 똑같이 옳다.)

소문항 (ii)

다시 인수분해하면 $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$이다. $x - y = d \neq 0$으로 나누면

$$x^2 + xy + y^2 = d^3.$$

또한 $(x-y)^2 = d^2$, 즉 $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$이다. 앞의 식에서 이 식을 빼면 요구한 대로 $3xy = d^3 - d^2$을 얻는다.

이제 $y = x - d$를 대입하면

$$3x(x-d) = d^3 - d^2 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 3dx - (d^3 - d^2) = 0.$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$x = \frac{3d \pm \sqrt{9d^2 + 12(d^3 - d^2)}}{6} = \frac{3d \pm \sqrt{3d^2(4d-1)}}{6}.$$

이때 $\sqrt{3d^2(4d-1)} = |d|\sqrt{3(4d-1)}$이고, $\pm$가 이미 두 부호를 모두 포함하므로 $|d|$를 d로 바꾸어도 된다. 2를 곱하면

$$2x = d \pm \frac{d\sqrt{3(4d-1)}}{3} = d \pm d\sqrt{\frac{4d-1}{3}},$$

이것이 요구한 결과이다.

생각해 보기 x와 y가 정수가 되도록 d를 어떻게 골라야 할까?

$m = x$와 $n = y$가 정수이면 $d = m - n$은 0이 아닌 정수이다. x가 유리수이려면 $\sqrt{(4d-1)/3}$이 유리수여야 한다. 이를 k라 하자. 그러면 $k^2 = (4d-1)/3$은 정수이고, 정수의 제곱근은 그 정수가 완전제곱수(perfect square)일 때만 유리수이므로 k는 정수이다. 따라서 다음이 필요하다.

$$4d - 1 = 3k^2 \quad \text{어떤 정수} k \geq 0.$$

좌변은 홀수이므로 k는 홀수이다. 그러면 $2x = d(1 \pm k)$는 짝수이므로 x는 정수이고, $y = x - d$도 정수이다.

- $k = 1$이면 $d = 1$이므로 $x = 1, y = 0$ 또는 $x = 0, y = -1$이다. 어느 쌍도 두 양의 정수로 이루어져 있지 않다.

- $k = 3$이면 $d = 7$이므로 $2x = 7 \pm 21$이다. 플러스 부호를 택하면 $x = 14, y = 7$이다.

따라서 $m = 14, n = 7$이 조건을 만족한다.

$$m^3 - n^3 = 2744 - 343 = 2401 = 7^4 = (m-n)^4.$$

순서가 중요하다. $m = 7, n = 14$이면 좌변은 -2401이지만 우변은 $+2401$이다.

검산

- 소문항 (i): $21^2 - 15^2 = 441 - 225 = 216$이고 $(21-15)^3 = 216$이다.
- 소문항 (ii): $d = 7$일 때 $3xy = 3 \cdot 14 \cdot 7 = 294$이고 $d^3 - d^2 = 343 - 49 = 294$이다.
- 컴퓨터로 $1 \le m, n < 200$ 범위를 탐색하면 정확히 $(14,7)$, $(57,38)$, $(148,111)$만 나온다. 이들은 $k = 3, 5, 7$(즉 $d = 7, 19, 37$)에서 나오며, 공식과 일치한다. 이 탐색은 또한 $(441, 225)$가 $n > 100$인 소문항 (i)의 해 중 가장 작은 것임을 확인해 준다.

흔한 실수

- 약분하려면 $x - y \neq 0$이어야 한다는 것을 잊는다. 문제에서 $d \neq 0$을 가정하는 이유가 바로 이것이다.
- 소문항 (i)에서 $d = 5$로 잡으면 $n = 100$이 되어 엄격한 부등식 $n > 100$을 만족하지 못한다.
- 아무 설명 없이 $\sqrt{d^2} = d$라고 쓴다. 이 값은 $|d|$이며, 절댓값(modulus)을 없앨 수 있게 해 주는 것은 $\pm$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 디오판토스 방정식(Diophantine equation) $m^3 - n^3 = (m-n)^4$을 완전히 푼다. $d = (3k^2+1)/4$ (단, $k \ge 3$은 홀수)로 두면 해는 $m = \frac{1}{2}d(k+1), n = \frac{1}{2}d(k-1)$이다. 제곱근이 유리수가 되도록 요구하는 것은 이러한 방정식을 훨씬 간단한 조건 $4d - 1 = 3k^2$으로 바꾸는 표준적인 방법이다. 이와 같은 방정식과 그 배경에 있는 이차 형식(quadratic form)의 산술은 Davenport의 *The Higher Arithmetic*에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.