풀이

# STEP I 2007, 문제 5

순수수학 • 다면체의 기하

**STEP I 2007, 5번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q5

## 핵심 아이디어

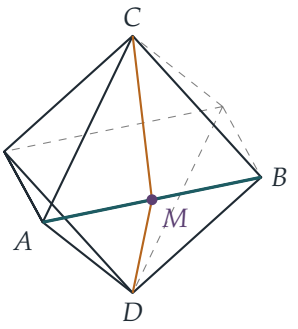
정팔면체(regular octahedron)는 좌표 위에 아주 깔끔하게 놓인다. 여섯 꼭짓점(vertex)을 양과 음의 각 좌표축 위에서 원점으로부터 한 단위 떨어진 점으로 잡을 수 있다. 이 모형을 쓰면 두 소문항 모두 벡터(vector) 계산일 뿐이다. 두 면(face) 사이의 각은 공통 모서리(edge)에 수직인 평면에서 재므로, 모서리의 중점(midpoint)에서 각 면을 가로질러 맞은편 꼭짓점까지 가는 두 선분을 이용한다. 면의 중심(centre)은 세 꼭짓점의 단순한 평균이다.

## 풀이

모든 정팔면체는 다른 정팔면체를 확대하거나 축소한 것이며, 각의 크기와 부피의 비는 확대·축소로 변하지 않는다. 따라서 꼭짓점이

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 1, 0), \qquad (0, 0, \pm 1).$$

인 정팔면체를 다루어도 된다. 이 점들 가운데 서로 반대편에 있지 않은 두 점 사이의 거리는 항상 $\sqrt{2}$이므로 모서리는 12개이고, 면은 각 축 위에 꼭짓점을 하나씩 가지는 8개의 삼각형으로, 부호를 고르는 방법 하나마다 하나씩 대응한다. 모든 면이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이므로, 이것은 정말로 정팔면체이다.




**소문항 (i)**

모서리 하나를 공유하는 두 면을 잡자. 대칭성에 의해 모든 모서리의 모양이 같으므로 하나만 보면 충분하다. $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$, $D=(0,0,-1)$이라 하면, 면 $ABC$와 $ABD$는 $AB$를 따라 만난다. $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$을 $AB$의 중점이라 하자.

**생각해 보기** 한 직선을 따라 만나는 두 평면 사이의 각은 어떻게 재는가?

공통 직선 위의 한 점을 잡고, 각 평면 안에서 그 점을 지나며 공통 직선에 수직인 직선을 긋는다. 이 두 직선 사이의 각이 두 면 사이의 각이다. 각 면은 정삼각형이므로 삼각형 $ABC$의 중선(median) $MC$는 $AB$에 수직이고, 삼각형 $ABD$의 중선 $MD$도 마찬가지이다. 따라서 구하는 각은 $\angle CMD$이다.

이제

$$\overrightarrow{MC}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right),\qquad \overrightarrow{MD}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right),$$

이고, 예상대로 둘 다 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$에 수직이다. 각각의 길이의 제곱은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$이고,

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{1}{2}.$$

이다. 그러므로

$$\cos\angle CMD=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3},$$

이고, 두 면 사이의 각은 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, 약 $109.5^\circ$로, 요구된 결과와 같다. 코사인 값이 음수이므로 이 각은 둔각(obtuse angle)이다. 즉 정팔면체는 모서리를 따라 정육면체(cube)보다 덜 뾰족하다.

좌표 없이 같은 계산을 하면 삼각형 $CMD$에서의 코사인법칙(cosine rule)이 된다. 모서리의 길이를 $a$라 하면 중선의 길이는 $MC=MD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, $C$와 $D$는 서로 반대편 꼭짓점이다. 네 점 $A$, $C$, $(-1,0,0)$, $D$는 한 변의 길이가 $a$인 정사각형을 이루므로 $CD=\sqrt{2}\,a$이다. 그러면

$$2a^2=\tfrac{3}{4}a^2+\tfrac{3}{4}a^2-2\cdot\tfrac{3}{4}a^2\cos\angle CMD\quad\Longrightarrow\quad\cos\angle CMD=-\tfrac{1}{3}.$$

**소문항 (ii)**

면의 중심은 그 면의 세 꼭짓점의 평균이다. 한 면은 $(\pm1,0,0)$ 꼴의 꼭짓점 하나, $(0,\pm1,0)$ 꼴의 꼭짓점 하나, $(0,0,\pm1)$ 꼴의 꼭짓점 하나를 가지므로 그 중심은

$$\left(\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3}\right),$$

이고, 부호를 고르는 여덟 가지 방법이 여덟 개의 중심을 준다. 이 점들은 정확히 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}$인 정육면체의 꼭짓점이므로

$$V_{\text{정육면체}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

정팔면체는 두 개의 정사각뿔(square-based pyramid)을 꼭짓점이 $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$인 정사각형을 따라 붙여 놓은 것이다. 이 정사각형의 대각선 길이는 2이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$이고, 각 사각뿔의 높이는 1이다. 따라서

$$V_{\text{정팔면체}} = 2\times\tfrac{1}{3}\times 2\times 1 = \tfrac{4}{3}.$$

그 비는

$$\frac{V_{\text{정팔면체}}}{V_{\text{정육면체}}} = \frac{4/3}{8/27} = \frac{9}{2},$$

이므로 정팔면체의 부피와 정육면체의 부피의 비는 $9:2$이다.

## 검산

- $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$이다. 좌표 모형의 12개 모서리 모두에 대해 중점을 이용한 계산을 수치적으로 반복하면 매번 $\cos = -\frac{1}{3}$이 나온다.
- 정팔면체는 $|x|+|y|+|z|\le 1$이다. $[-1,1]^3$에서 무작위로 뽑은 $10^6$개의 점으로 부피를 몬테카를로(Monte Carlo) 방법으로 추정하면 1.330이 나오며, 정확한 값은 $\frac{4}{3}$이다.
- 정육면체는 정팔면체 안에 있으므로(각 중심이 $|x|+|y|+|z|=1$을 만족한다) 그 비는 1보다 커야 한다. 실제로 $\frac{9}{2}$는 1보다 크다.

## 흔한 실수

- 바깥쪽 법선(outward normal) $(1,1,1)$과 $(1,1,-1)$ 사이의 각을 구해 $\arccos\frac{1}{3}$을 얻는 것. 두 면 자체 사이의 각은 그 각의 보각(supplement)이다.
- 두 모서리 $CA$와 $DA$처럼 공통 모서리에 수직이 아닌 선분을 따라 각을 재는 것. 이 경우 그 각은 $90^\circ$이며, 두 면 사이의 각이 아니다.
- 정육면체의 한 변의 길이를 서로 마주 보는 두 면의 중심 사이의 거리로 생각하는 것. 그 거리 $\frac{2}{\sqrt{3}}$은 정육면체의 공간 대각선(space diagonal)이다.

## STEP 너머

정육면체와 정팔면체는 **쌍대**(dual) 다면체(polyhedra)이다. 어느 한쪽의 면의 중심들을 이으면 다른 쪽이 나오며, 이때 면과 꼭짓점의 역할이 서로 바뀐다. 쌍대성은 두 입체의 대칭군(symmetry group)이 위수(order) 48인 같은 군(group)이라는 첫 번째 신호이며, 이 군은 대학의 첫 군론 강의에서 만나게 된다. 플라톤 입체(Platonic solids)의 대칭군에 대해서는 Armstrong의 *Groups and Symmetry*(군과 대칭)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.