풀이

STEP I 2007, 문제 4

순수수학 • 이차방정식의 공통근

> **STEP I 2007, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q4

핵심 아이디어

첫 번째 부분은 $x^3+y^3+z^3-3xyz$의 고전적인 인수분해(factorisation)이며, $x+b+c$가 인수라는 것을 알고 나면 계수 비교를 통해 이차식을 얻을 수 있다. 두 번째 부분에서는 근을 공유하는 두 이차방정식이 주어진다. 표준적인 기법은 **소거**(*elimination*)이다. 즉 두 방정식을 결합하여 k의 거듭제곱 하나가 상쇄되도록 한다. 이를 두 가지 방법으로 하면 k와 k^2를 비(ratio)로 나타낼 수 있고, 그러면 $k^2=(k)^2$로부터 계수들만의 관계식을 얻는다. 그 관계식은 알고 보면 첫 번째 부분에서 $x=a$로 둔 것이다.

풀이

인수분해

$P(x)=x^3-3xbc+b^3+c^3$에 $x=-(b+c)$를 대입하면

$$\begin{aligned}P(-b-c)&=-(b+c)^3+3bc(b+c)+b^3+c^3\\&=-(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0,\end{aligned}$$

이므로 인수 정리(factor theorem)에 의해 $x+b+c$는 인수이다. 계수를 비교하면(P의 x^2항은 0이고 상수항은 b^3+c^3이다)

$$x^3-3xbc+b^3+c^3=(x+b+c)\,\mathrm{Q}(x),\qquad \mathrm{Q}(x)=x^2+b^2+c^2-xb-bc-cx.$$

를 얻는다. 우변을 전개하면 이를 확인할 수 있다. x^2항은 $x^2(b+c)-x^2(b+c)=0$이고, x항을 모으면 $-3bcx$이며, 상수항은 b^3+c^3이다.

제곱의 합으로 나타내기 위해 살펴보면, $2\mathrm{Q}(x)$에서 x^2, b^2, c^2는 각각 두 번씩 나타나고 각

교차항은 $-2xb$ 등의 꼴로 나타나므로

$$2\mathrm{Q}(x) = (x-b)^2 + (b-c)^2 + (c-x)^2.$$

이다.

공통근

k는 두 방정식의 근이므로

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{1}$$
$$bk^2 + ck + a = 0. \tag{2}$$

이다. k^2를 없애기 위해 $b \times (1) - a \times (2)$를 계산하면

$$(b^2 - ac)k + bc - a^2 = 0, \qquad \text{따라서} \qquad (ac - b^2)\,k = bc - a^2.$$

이다. 대신 k항을 없애기 위해 $c \times (1) - b \times (2)$를 계산하면

$$(ac - b^2)k^2 + c^2 - ab = 0, \qquad \text{따라서} \qquad (ac - b^2)\,k^2 = ab - c^2.$$

이다. 이것이 k^2를 포함하는 비슷한 식이다.

이제 $k^2 = k \cdot k$를 이용한다. $ac \neq b^2$이므로 $ac - b^2$로 나눌 수 있고, $k = \dfrac{bc - a^2}{ac - b^2}$를 얻으므로

$$(ac - b^2)\,\frac{(bc - a^2)^2}{(ac - b^2)^2} = ab - c^2 \quad \Longrightarrow \quad (ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2,$$

이다. 여기서 마지막 식은 양변에 $ac - b^2$를 곱하여 얻는다. 이것이 구하는 결과이다.

양변을 전개하면

$$a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$\text{따라서} \quad 0 = a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right).$$

이다. $a \neq 0$이므로 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0$을 얻고, 이것이 구하는 결과이다.

? 생각해 보기 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$을 어디에서 본 적이 있는가?

이것은 첫 번째 부분에서 $x = a$로 둔 것이다. 따라서

$$(a + b + c)\,\mathrm{Q}(a) = 0, \qquad 2\mathrm{Q}(a) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

이다. 그러므로 $a + b + c = 0$이거나 $\mathrm{Q}(a) = 0$이다.

$Q(a) = 0$**인 경우.** a, b, c가 실수이므로 세 제곱은 모두 음이 아니고, 그 합이 0이 되는 것은 각각이 0일 때뿐이다. 따라서 $a = b = c$이고, 두 방정식은 모두 $a(y^2 + y + 1) = 0$이 되어 서로 같다.

$a + b + c = 0$**인 경우.** k에 대한 식에 $c = -a - b$를 대입하면

$$bc - a^2 = -ab - b^2 - a^2, \qquad ac - b^2 = -a^2 - ab - b^2,$$

이므로 $bc - a^2 = ac - b^2$이고, 이 값은 0이 아니므로 $k = 1$이다. (실제로 $y = 1$은 두 방정식을 모두 만족한다. 이때 각 방정식은 $a + b + c = 0$이 되기 때문이다.)

따라서 $k = 1$이거나 두 방정식이 서로 같으며, 이로써 문제가 해결된다.

같은 방정식이 되는 경우에는 $a = b = c$로부터 $ac = b^2$가 되는데, 이는 가정에서 배제된 것임에 주목하자. 따라서 주어진 조건 아래에서 공통근은 사실 항상 $k = 1$이다. "같은 방정식"이라는 다른 경우는 $ac \neq b^2$라는 조건을 없앴을 때 일어나는 일이며, 그때 공통근은 1의 복소 세제곱근(complex cube roots of unity)이다.

검산

$a = 1, b = 2, c = -3$으로 두면 $a + b + c = 0$이다. 방정식은 $y^2 + 2y - 3 = (y - 1)(y + 3) = 0$과 $2y^2 - 3y + 1 = (2y - 1)(y - 1) = 0$이고, 공통근 $k = 1$을 가진다. 이때 $ac - b^2 = -7$, $bc - a^2 = -7$, $ab - c^2 = -7$이므로 $(ac - b^2)k = bc - a^2$, $(ac - b^2)k^2 = ab - c^2$, $(-7)(-7) = (-7)^2$이 모두 성립하고, $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 1 + 18 + 8 - 27 = 0$이다. 또한 첫 번째 부분의 두 항등식과 전개식 $(ac - b^2)(ab - c^2) - (bc - a^2)^2 = -a(a^3 - 3abc + b^3 + c^3)$을 무작위로 고른 1000개의 세 수 쌍에 대해 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- 상수항을 소거하면 $(a \times (1) - c \times (2))\, k\big((a^2 - bc)k + ab - c^2\big) = 0$을 얻는데, 이것이 쓸모 있으려면 $k \neq 0$이 더 필요하다. $c \times (1) - b \times (2)$의 결합을 쓰면 이 문제를 피할 수 있다.
- 문제에서 $ac - b^2$가 0이 아님을 보장한다는 것을 언급하지 않고 $ac - b^2$로 나누는 것.
- a, b, c가 실수라는 사실을 쓰지 않고 $Q(a) = 0$으로부터 $a = b = c$라고 결론짓는 것. 제곱의 합을 이용한 논증은 복소수에서는 성립하지 않는다.

STEP 너머

두 다항식이 공통근을 가질 조건은 일반적으로 계수들로 만든 행렬식인 **종결식**(*resultant*)으로 주어진다. 관계식 $(ac-b^2)(ab-c^2)=(bc-a^2)^2$은 바로 이 두 이차식의 종결식을 0으로 둔 것이다. 식 $a^3+b^3+c^3-3abc$는 순환행렬(circulant matrix)의 행렬식이기도 하며, ω를 1의 복소 세제곱근이라 할 때 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$로 완전히 인수분해된다. 다항식과 그 근에 대해 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.