풀이

STEP I 2007, 문제 3

순수수학 • 삼각함수의 적분

> **STEP I 2007, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q3

핵심 아이디어

$\cos^4\theta$와 $\sin^4\theta$는 각각 따로 적분하기가 쉽지 않다. 그러나 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하여 2θ의 함수로 정리하면, 둘의 **차**와 **합**은 모두 쉽게 적분된다. 합과 차를 적분하면 구하려는 두 적분에 대한 간단한 일차방정식 두 개를 얻는다. 같은 방법을 한 차수 높여 적용하면 여섯제곱도 해결된다.

풀이

항등식

제곱의 차(difference of two squares)를 인수분해하면

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos 2\theta \cdot 1 = \cos 2\theta.$$

합에 대해서는 완전제곱식(completing the square)을 만든다.

$$\begin{aligned}\cos^4\theta + \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta,\end{aligned}$$

여기서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 이용하였다. 이로써 두 항등식(identity)이 모두 증명되었다.

네제곱

$C_4 = \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$, $S_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$라 하자. 첫 번째 항등식을 적분하면

$$C_4 - S_4 = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

두 번째 항등식에 대해서는 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta$가 필요하다. $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$를 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

이다. $\sin 2\pi = 0$이기 때문이다. 따라서

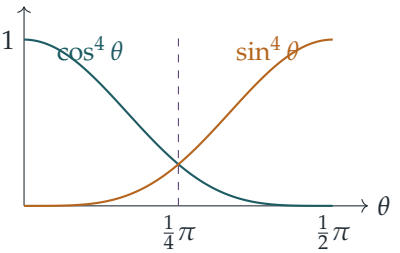
$$C_4 + S_4 = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

두 식을 더하고 빼면

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

생각해 보기 계산 없이도 $C_4 = S_4$임을 알아볼 수 있었을까?

그렇다. 치환(substitution) $\phi = \frac{1}{2}\pi - \theta$를 하면 $\cos\theta$는 $\sin\phi$가 되고 적분 구간의 끝 0과 $\frac{1}{2}\pi$가 서로 바뀌므로, 모든 n에 대하여 $\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\phi\,\mathrm{d}\phi$이다. $\cos^4\theta$와 $\sin^4\theta$의 그래프는 직선 $\theta = \frac{1}{4}\pi$에 대하여 서로 대칭이므로, 둘러싸는 넓이가 같다.



따라서 실제로 필요한 것은 합에 대한 항등식뿐이다. 차의 적분이 0이 되는 것은 대칭성(symmetry)이 모습을 바꾸어 나타난 것이다.

여섯제곱

같은 방법을 되풀이한다. $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 하면 $c^2 + s^2 = 1$이고

$$\begin{aligned} c^6 - s^6 &= (c^2 - s^2)(c^4 + c^2s^2 + s^4) = \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) \\ &= \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 앞에서 증명한 항등식과 $c^2s^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$를 이용하였다. 합에 대해서는 $c^2 + s^2$의 세제곱을 이용한다.

$$c^6 + s^6 = (c^2 + s^2)^3 - 3c^2s^2(c^2 + s^2) = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

두 적분을 C_6, S_6이라 하자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^3 2\theta = 6\sin^2 2\theta\cos 2\theta$이므로

$$C_6 - S_6 = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{24}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

이고, 이는 대칭성 논증으로 예측한 결과와도 같다. 또 $\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$를 다시 이용하면

$$C_6 + S_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}.$$

그러므로

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

검산

- 지수가 커질수록 답이 작아진다. $n = 0$일 때 $\frac{1}{2}\pi$, $n = 2$일 때 $\frac{1}{4}\pi$, 그다음은 $\frac{3}{16}\pi$와 $\frac{5}{32}\pi$이다. 구간에서 $0 \le \cos\theta \le 1$이므로 당연히 그래야 한다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.589049$, $\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.490874$로 $3\pi/16$, $5\pi/32$와 일치한다. 사인의 적분도 같은 정확도로 이 값과 일치한다.
- 합에 대한 항등식에 $\theta = \frac{1}{4}\pi$를 대입하면 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2}$와 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{3}{4}$를 얻으며, 둘 다 참이다.

흔한 실수

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$에서 유추하여 $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1$이라고 쓰는 실수. 교차항 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$가 빠져 버린다.
- $\cos 2\theta$나 $\cos 4\theta$를 적분할 때 연쇄 법칙(chain rule)에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 실수. 이 문제에서 $\cos 2\theta$의 경우에는 (어차피 적분값이 0이므로) 상관없지만, $\sin^2 2\theta$의 경우에는 결과가 달라진다.

STEP 너머

이 적분들은 월리스(Wallis) 적분(Wallis's integrals) $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$의 특수한 경우이며, 이 적분은 점화식(reduction formula) $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$를 만족한다(부분적분(integration

by parts)을 하면 된다). $I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$와 $I_6 = \frac{5}{6} I_4$가 위의 답을 다시 만들어 냄을 확인해 볼 수 있다. I_{2n}과 I_{2n+1}을 비교하면 π에 대한 월리스의 유명한 무한곱(infinite product)에 이른다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 점화식을 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 극한 논증을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.