풀이

STEP I 2007, 문제 2

순수수학 • 역탄젠트 항등식

> **STEP I 2007, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q2

핵심 아이디어

역탄젠트(inverse tangent) 사이의 등식은 양변에 탄젠트를 취하고 $\tan(A+B)$의 덧셈 정리(addition formula)를 쓰는 순간 보통의 분수 사이의 등식이 된다. 그 대가로, tan는 주기 π마다 반복되므로 $\tan(A+B)=1$로부터는 $A+B=\frac{1}{4}\pi+k\pi$라는 것만 알 수 있다. k를 정하려면 각의 크기에 대해 한마디 덧붙여야 한다. 그다음부터는 각 소문항이 작은 정수론(number theory) 문제가 된다. 인수분해(factorise)를 하거나, 나누어떨어짐(divisibility)에 관한 논증을 쓰면 된다.

풀이

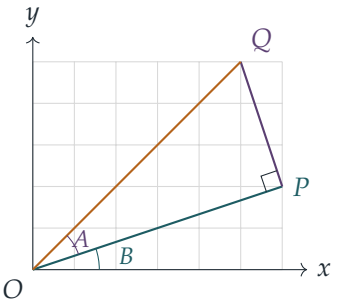
소문항 (i)

$\tan A=\frac{1}{2}$이고 $\tan B=\frac{1}{3}$이므로

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

이제 A와 B는 예각이므로 $0<A+B<\pi$이고, $(0,\pi)$에서 탄젠트 값이 1인 각은 $\frac{1}{4}\pi$뿐이다. 따라서 요구한 대로 $A+B=\frac{1}{4}\pi$이다.

아래 그림은 같은 사실을 모눈종이 위에 나타낸 것이다. $O=(0,0)$, $P=(6,2)$, $Q=(5,5)$라 하면, 직선 OP는 x축과 각 $\arctan\frac{1}{3}$을 이룬다. $PQ=(-1,3)$은 $OP=(6,2)$에 수직이고 길이가 그 절반이므로 각 POQ는 $\arctan\frac{1}{2}$이다. 그리고 Q는 직선 $y=x$ 위, 즉 $\frac{1}{4}\pi$의 방향에 있다.



소문항 (i): 정수 p와 q

먼저 덧셈정리에서 0으로 나누게 되는 경우인 $pq = 1$을 배제한다. 이 경우 $p = q = 1$ 또는 $p = q = -1$이고, 좌변은 각각 $\frac{1}{2}\pi$와 $-\frac{1}{2}\pi$가 되어 어느 것도 $\frac{1}{4}\pi$가 아니다. 따라서 $pq \neq 1$이고, 주어진 등식의 양변에 탄젠트를 취하면

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{pq}} = 1.$$

분자와 분모에 pq를 곱하면 $\dfrac{p+q}{pq-1} = 1$이므로

$$p + q = pq - 1 \quad \Longrightarrow \quad pq - p - q + 1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$p-1$과 $q-1$은 곱이 2인 정수이므로, 순서쌍 $(p-1, q-1)$은 다음 중 하나이다.

$$(1,2), \quad (2,1), \quad (-1,-2), \quad (-2,-1),$$

따라서 $(p,q) = (2,3), (3,2), (0,-1)$ 또는 $(-1,0)$이다. 마지막 두 경우는 p와 q가 0이 아니므로 제외된다. 그러므로 $\{p,q\} = \{2,3\}$이고, 소문항 (i)의 앞부분에 의해 두 순서 모두 실제로 등식을 만족한다.

> **생각해 보기** 우리는 해가 반드시 $(p-1)(q-1) = 2$를 만족해야 한다는 것만 보였다. 왜 그 후에 후보들을 확인해야 할까?

탄젠트를 취하면 정보가 사라진다. $(p-1)(q-1) = 2$는 $\tan(\arctan\frac{1}{p} + \arctan\frac{1}{q}) = 1$과 동치이며, 이는 $-\frac{3}{4}\pi$와 같은 합도 허용한다. 여기서 후보 순서쌍은 0을 포함하거나(그러면 $\frac{1}{p}$는 의미가 없다) 2와 3이며, 후자는 성립함을 이미 알고 있다.

소문항 (ii)

$\theta = \arctan\frac{1}{r}$, $\phi = \arctan\dfrac{s}{s+t}$라 하자. 주어진 등식에 탄젠트를 취하면

$$\frac{\frac{1}{r} + \frac{s}{s+t}}{1 - \frac{s}{r(s+t)}} = 1.$$

분모는 0이 아니다. $r \geq 1$이고 $t \geq 1$이므로 $r(s+t) > s$이기 때문이다. 분자와 분모에 $r(s+t)$를 곱하면

$$\frac{(s+t)+rs}{r(s+t)-s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s+t+rs = rs+rt-s \quad \Longrightarrow \quad t(r-1) = 2s.$$

? **생각해 보기** s와 t의 최대공약수에 관한 조건은 어디에서 쓰일까?

등식 $t(r-1) = 2s$는 t가 $2s$를 나눈다는 뜻이다. $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$이므로 t는 s와 공통인 소인수를 갖지 않고, 따라서 t의 모든 소인수는 2에서 와야 한다. 즉 t는 2를 나눈다. t는 양의 정수이므로 가능한 값은

$$t = 1 \quad \text{또는} \quad t = 2.$$

뿐이다.

- $t = 1$이면 $r - 1 = 2s$이므로 $r = 2s + 1$이다.
- $t = 2$이면 $2(r-1) = 2s$이므로 $r = s + 1$이다. (이때 $\mathrm{hcf}(s,2) = 1$이므로 s는 홀수여야 한다.)

두 경우 모두 실제로 일어난다. 실제로 $0 < \frac{1}{r} \leq 1$이고 $0 < \frac{s}{s+t} < 1$이므로 θ와 ϕ는 모두 $(0, \frac{1}{4}\pi]$에 속하고 $0 < \theta + \phi < \frac{1}{2}\pi$이다. 위의 계산을 거꾸로 따라가면 $t(r-1) = 2s$로부터 $\tan(\theta+\phi) = 1$을 얻고, 따라서 정확히 $\theta + \phi = \frac{1}{4}\pi$이다. 예를 들어 $t = 1$, $s = 1$이면 $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$를, $t = 2$, $s = 1$이면 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$을 얻는다. 소문항 (i)의 항등식을 양쪽 순서로 얻는 것이다.

검산

- 계산기로 계산하면 $\arctan 0.5 + \arctan(1/3) = 0.4636 + 0.3218 = 0.7854 = \frac{1}{4}\pi$이다.
- $|p|, |q| \leq 200$인 0이 아닌 모든 p, q에 대해 컴퓨터로 탐색하면 $(2,3)$과 $(3,2)$만 나온다.
- $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$인 $r < 400$, $s, t < 150$에 대해 탐색하면 $t = 1$, $r = 2s + 1$과 $t = 2$, $r = s + 1$만 나온다. 예를 들어 $\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\pi$ ($s = 7$, $t = 2$)는 기계 정밀도 안에서 성립한다.

흔한 실수

- $A+B$가 왜 $\frac{5}{4}\pi$일 수 없는지 말하지 않고 $\tan(A+B)=1$로부터 $A+B=\frac{1}{4}\pi$라고 결론짓는 것.
- 2의 음수 인수분해 $(-1)(-2)$와 $(-2)(-1)$을 잊거나, 이들이 o을 주므로 버려야 한다는 것을 잊는 것.
- $\mathrm{hcf}(s,t)=1$을 언급하지 않고 "t가 $2s$를 나누므로 t는 2를 나눈다"라고 말하는 것. 바로 이 지점에서 가정이 필요하다.

STEP 너머

tan의 덧셈정리는 사실 복소수(complex number)의 곱셈이다. $\arctan\frac{1}{p}$는 $p+\mathrm{i}$의 편각(argument)이므로, 소문항 (i)은 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=5+5\mathrm{i}$의 편각이 $\frac{1}{4}\pi$라는 명제이다. 한때 π를 수백 자리까지 계산하는 데 쓰였던 마친(Machin)의 공식 $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{1}{4}\pi$ 같은 항등식은 바로 이런 방식으로 가우스 정수(Gaussian integers)를 인수분해하여 얻어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 기하학을 아름답게 전개하며, 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 소문항 (ii)에서 쓰인 나누어떨어짐 논증을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.