풀이

STEP I 2007, 문제 11

역학 • 포물체 운동

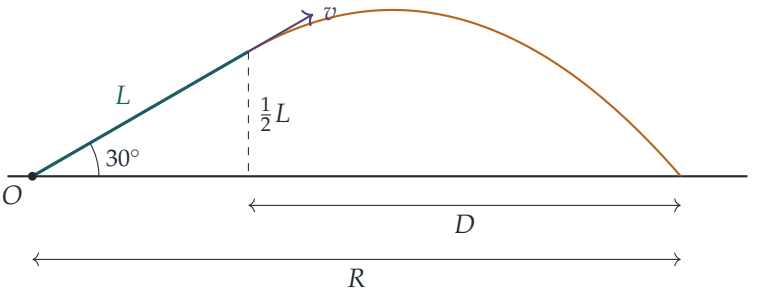
> **STEP I 2007, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q11

핵심 아이디어

운동을 두 단계로 나눈다. 매끄러운(smooth) 관 안에서 관을 따르는 방향의 힘은 중력의 성분뿐이므로, 에너지(또는 등가속도 공식)로 관을 빠져나올 때의 속력을 구할 수 있다. 그 뒤로는 착지 높이보다 $\frac{1}{2}L$만큼 높은 점에서 30°로 발사된 평범한 포물체(projectile)의 운동이다. 비행 시간을 소거하면 D에 대한 이차방정식(quadratic)을 얻고, 이 식을 **음함수 미분**(implicit differentiation)하면 D를 직접 구하지 않고도 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$을 얻는다.

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 관은 매끄럽다고(따라서 수직항력(normal reaction)은 일을 하지 않으며 관 방향 성분도 없다) 모형화하고, 공기 저항은 무시한다.



관 안에서

관 방향으로 힘을 분해하면, 유일한 힘의 성분은 경사면 아래쪽으로 향하는 $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$이므로 감속도(deceleration)는 $\frac{1}{2}g$이다. 거리 L을 지나는 동안

$$v^2 = u^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}g\cdot L = u^2 - gL,$$

이고, 여기서 v는 관을 빠져나올 때의 속력이다. (입자가 관을 빠져나오려면 애초에 $u^2 > gL$이어야 한다.) 관의 위쪽 끝은 아래쪽 끝보다 높이 $L\sin 30^\circ = \frac{1}{2}L$만큼 높고, 수평 거리로는 $L\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}L$만큼 떨어져 있다.

포물체 운동 단계

입자는 관의 방향을 따라 빠져나오므로, 속도의 수평 성분은 $\frac{\sqrt{3}}{2}v$이고 연직 성분은 위쪽으로 $\frac{1}{2}v$이다. 빠져나온 점을 기준으로 시간 t가 지난 뒤

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y = \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

입자는 $y = -\frac{1}{2}L$일 때 아래쪽 끝의 높이로 돌아오며, 그 순간 $x = D$이다. 첫 번째 식에서 $t = \dfrac{2D}{\sqrt{3}\,v}$이고, 이를 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{D}{\sqrt{3}} - \frac{2gD^2}{3v^2} = -\frac{L}{2}.$$

양변에 $-6v^2$을 곱하면

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,v^2D - 3Lv^2 = 0,$$

이고, $v^2 = u^2 - gL$을 대입하면

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,(u^2 - gL)D - 3L(u^2 - gL) = 0,$$

이 되어 구하려던 방정식을 얻는다. (두 근의 곱이 $-3Lv^2/(4g) < 0$이므로, 두 근 가운데 D는 양수인 근이다.)

도함수

u를 고정하면 D는 L에 따라 달라지므로, 방정식을 L에 대해 미분한다. 이때 둘을 모두 포함하는 각 항에는 곱의 법칙(product rule)을 쓴다.

$$8gD\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} + 2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL) + 3gL = 0.$$

마지막 두 항을 합치면 $-3(u^2 - 2gL)$이다. $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$이 들어 있는 항끼리 모으면

$$\left(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\right)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\left(2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)\right),$$

이므로

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\frac{2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)}{8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)},$$

이 되어 증명이 끝난다.

? 생각해 보기 왜 $-3L(u^2 - gL)$ 항에서 두 조각이 나오는가?

이 항에는 L이 두 번 나타나기 때문이다. $-3Lu^2 + 3gL^2$을 미분하면 $-3u^2 + 6gL$이고, 이는 $-3(u^2 - gL) + 3gL$과 같다. 괄호 안의 L을 잊어버리는 것이 답의 $2gL$을 놓치는 가장 흔한 길이다.

R이 정상값을 가질 때

아래쪽 끝에서 잰 최종 수평 변위는 관의 수평 길이에 D를 더한 것이다.

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}L} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L}.$$

그러므로 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$일 필요충분조건은 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 이는 (분모를 양변에 곱하면. 분모가 0이 아님은 아래에서 확인한다)

$$2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\big) = 4\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL).$$

과 같다. $3u^2$ 항이 소거되어 $6gL - 2\sqrt{3}\,gD = 3gL$이 남으므로 $2\sqrt{3}\,gD = 3gL$, 즉

$$2D = L\sqrt{3}.$$

모든 단계는 거꾸로도 성립하므로, $2D = L\sqrt{3}$일 때 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$이 되어 증명이 끝난다.

R을 구하기 위해 이차방정식에 $D = \frac{\sqrt{3}}{2}L$을 대입하면

$$4g \cdot \tfrac{3}{4}L^2 - 2\sqrt{3}(u^2 - gL) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}L - 3L(u^2 - gL) = 3gL^2 - 6L(u^2 - gL) = 0.$$

$L > 0$이므로 $gL = 2(u^2 - gL)$이고, 따라서 $L = \dfrac{2u^2}{3g}$이다. (이때 $v^2 = u^2 - gL = \frac{1}{3}u^2 > 0$이므로 입자는 실제로 관을 빠져나오며, 분모 $8gD - 2\sqrt{3}v^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}u^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}u^2 = 2\sqrt{3}\,u^2$은 0이 아니다.) 마지막으로

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D = \sqrt{3}\,L = \frac{2\sqrt{3}\,u^2}{3g} = \frac{2u^2}{\sqrt{3}\,g}.$$

검산

- $L = 0$이면 이차방정식에서 $D = \sqrt{3}u^2/(2g)$를 얻는데, 이는 30°로 발사했을 때의 익숙한 사거리 $u^2 \sin 60° / g$이다.

- $L = u^2/g$이면 입자는 $v = 0$으로 겨우 위쪽 끝에 도달하므로 $D = 0$이고, 다시 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2/g$이다. 정상값 $2u^2/(\sqrt{3}g) \approx 1.155\,u^2/g$는 이 두 경우 사이에 있으면서 둘 모두보다 크므로 최댓값이다.
- 수치적으로, $u = g = 1$로 두고 L을 $[0,1]$에서 훑으면 $L \approx 0.6667$에서 가장 큰 R인 1.1547을 얻으며, 이는 $2/\sqrt{3}$ 및 $L = \frac{2}{3}$과 일치한다. 운동을 직접 단계별로 계산해도 D에 대한 이차방정식이 그대로 재현된다.

흔한 실수

- 관 안에서의 감속도를 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$가 아니라 g로 잡는 것.
- $y = -\frac{1}{2}L$ 대신 $y = 0$으로 두는 것. 입자는 발사점보다 낮은 곳에 떨어진다.
- 관 자체의 수평 길이 $\frac{\sqrt{3}}{2}L$을 잊고 $R = D$로 쓰는 것.

STEP 너머

방정식 $F(D,L) = 0$을 풀지 않고 미분하는 것이 음함수 미분이며, 대학 1학년 해석학(analysis)에서는 이것이 음함수 정리(implicit function theorem)가 된다. 즉 $F_D \neq 0$인 곳이면 어디서든 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -F_L/F_D$가 성립하는데, F_D가 바로 우리가 확인한 분모이다. 역학을 더 공부하고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.