풀이

STEP I 2007, 문제 10

역학 • 변위-시간 그래프

> **STEP I 2007, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q10

핵심 아이디어

변위–시간 그래프(displacement–time graph)에서 각 기수와 각 군대는 하나의 직선(또는 두 개의 선분)으로 나타나며, "서로 지나친다"는 것은 단지 두 직선이 만난다는 뜻이다. 따라서 색슨 군대로부터 변위를 재어 각 직선의 방정식을 쓰고, 그 교점을 구한다. 문제에 주어진 부등식들은 정확히 교차가 우리가 예상하는 순서대로 일어나기 위한 조건이며, 마지막 부분은 그중 하나가 성립하지 않을 때 무슨 일이 일어나는지에 관한 것이다.

풀이

그래프 세우기

군대와 기수를 하나의 직선 위를 움직이는 점으로 모형화한다. s를 (정지해 있는) 색슨 군대로부터 노르만 군대 쪽으로 잰 변위라 하고, 두 군대 사이의 거리가 d일 때 시간을 재기 시작한다. 그러면 다음과 같다.

- 색슨 군대: $s = 0$.
- 노르만 군대: $s = d - ut$.
- 색슨 기수, 가는 길: $s = xt$. 그는 $xt = d - ut$일 때, 즉 $t_S = \dfrac{d}{x+u}$에 $s = \dfrac{xd}{x+u}$에서 노르만 군대에 도착한다. 속력 x로 돌아오므로

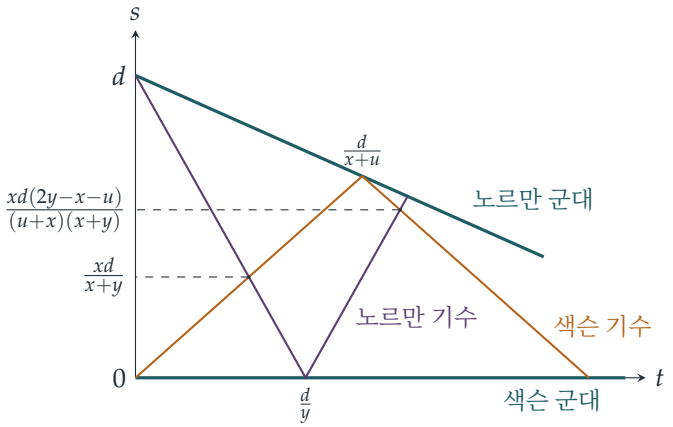
$$s = \frac{xd}{x+u} - x\left(t - \frac{d}{x+u}\right) = \frac{2xd}{x+u} - xt,$$

이고, $t = \dfrac{2d}{x+u}$에 진영으로 돌아온다.

▶ 노르만 기수, 가는 길: $s = d - yt$. 그는 $t_N = \dfrac{d}{y}$에 색슨 군대에 도착하고, 속력 y로 돌아올 때 그의 직선은

$$s = y\left(t - \frac{d}{y}\right) = yt - d.$$

이다. $y > u$이므로 그는 $yt - d = d - ut$일 때, 즉 $t = \dfrac{2d}{y+u}$에 자기 군대를 실제로 따라잡는다.



(그림은 $u = 1, x = 2, y = 4, d = 1$로 그린 것이다.)

첫 번째 지나침

두 기수 모두 가는 길에 있으므로 $s = xt$와 $s = d - yt$의 교점을 구한다. $(x+y)t = d$이므로

$$t = \frac{d}{x+y}, \qquad s = \frac{xd}{x+y}.$$

이다. $\frac{d}{x+y}$는 $\frac{d}{y}$와 $\frac{d}{x+u}$보다 모두 작으므로(두 번째 비교에는 $y > u$를 쓴다), 이는 정말로 어느 쪽도 방향을 돌리기 전이다.

두 번째 지나침

이제 두 기수 모두 돌아오는 길에 있으므로 $s = \dfrac{2xd}{x+u} - xt$와 $s = yt - d$의 교점을 구한다. 양변에 $xt + d$를 더하면

$$(x+y)t = d + \frac{2xd}{x+u} = \frac{d(3x+u)}{x+u}, \qquad \text{따라서} \qquad t_2 = \frac{d(3x+u)}{(x+u)(x+y)}.$$

이다. 그러면

$$s = \frac{2xd}{x+u} - \frac{xd(3x+u)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd\big(2(x+y) - (3x+u)\big)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd(2y-x-u)}{(u+x)(x+y)},$$

이고, 이것이 구하는 두 번째 거리이다.

> **생각해 보기** 시각 t_2에 두 기수가 정말로 돌아오는 길에 있다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

바로 여기서 부등식(inequality)이 필요하다. 노르만 기수는 $t_2 \geq \frac{d}{y}$이면 방향을 돌린 상태이다.

$$y(3x+u) \geq (x+u)(x+y) \iff 3xy \geq x^2+xy+ux \iff u \leq 2y-x.$$

색슨 기수는 $t_2 \geq \frac{d}{x+u}$이면 방향을 돌린 상태이다.

$$3x+u \geq x+y \iff u \geq y-2x.$$

따라서 조건 $y-2x < u < 2y-x$는 정확히 t_2가 두 반환점 이후에 오도록 하는 조건이다. 같은 조건 $u < 2y-x$는 $s > 0$도 보장하므로 색슨 기수는 아직 진영에 돌아오지 않았다. (명시되지 않은 조건이 하나 더 있다. 노르만 기수가 그보다 먼저 자기 군대에 도착해서는 안 된다. $t_2 \leq \frac{2d}{y+u}$를 정리하면 $(x-u)(2x-y+u) \geq 0$이 되고, $2x-y+u > 0$이므로 이는 $x \geq u$, 즉 색슨 기수가 노르만 군대보다 느리지 않다는 뜻이다. 이는 분명히 의도된 조건이다. 그렇지 않으면 그가 방향을 돌리는 순간 군대가 그를 추월할 것이다.)

경우 (i): $u > 2y-x$

이제 $t_2 < \frac{d}{y}$이다. 색슨 기수의 돌아오는 길과 노르만 기수의 **가는** 길을 나타내는 직선이 먼저 만난다. $y > u$이므로 이 경우에는 $x > y$, 즉 색슨 기수가 더 빨라야 한다. 그는 노르만 군대에 도착하여 방향을 돌리고, 두 기수가 모두 색슨 군대 쪽으로 향하는 동안 뒤에서 노르만 기수를 따라잡는다. ($s = \frac{2xd}{x+u} - xt$와 $s = d - yt$의 교점을 구하면 이 지점은 색슨 군대로부터 $\frac{xd(x+u-2y)}{(x+u)(x-y)}$만큼 떨어져 있다.) 그는 노르만 기수가 $\frac{d}{y}$에 도착하기 전인 $\frac{2d}{x+u}$에 진영으로 돌아오므로, 두 기수는 두 번째로 마주 보며 만나지 않는다. 노르만 기수는 그저 상대가 이미 돌아와 있는 색슨 군대에 도착할 뿐이다.

경우 (ii): $u < y-2x$

이제 $t_2 < \frac{d}{x+u}$이다. 노르만 기수가 훨씬 빠르다. 그는 색슨 군대에 도착하여 방향을 돌리고, 아직 노르만 군대를 향해 가고 있는 색슨 기수를 추월한다. $s = yt - d$와 $s = xt$의 교점을 구하면, 이 일은 $t = \frac{d}{y-x}$에 색슨 군대로부터 $\frac{xd}{y-x}$인 곳에서 일어난다. 그 후 노르만 기수는 색슨 기수가 $\frac{d}{x+u}$에 노르만 군대에 도착하기 전인 $\frac{2d}{y+u}$에 진영으로 돌아오며($2(x+u) < y+u$이므로), 열린 들판에서 더 이상의 지나침은 없다.

검산

- $d = 1, u = 1, x = 2, y = 4$(그림과 같음)일 때 공식은 $\frac{1}{3}$과 $\frac{5}{9}$에서의 지나침을 준다. 시간 간격 10^{-5}로 운동을 수치적으로 따라가면 0.3333과 0.5556에서 교차가 일어난다.
- $y = x + u$이면 두 거리는 모두 $\frac{x}{x+y}d$로 같다. 시험해 보기 좋은 특별한 값이다.
- $u \to 2y - x$일 때 두 번째 거리는 0으로 수렴한다. 두 번째 지나침이 바로 색슨 군대에서 일어나며, 이것이 경우 (i)와의 경계이다.

흔한 실수

- 시간의 원점을 방향을 돌리는 순간으로 옮기는 것을 잊고, 기수의 돌아오는 길을 $s = -xt$나 $s = yt$로 쓰는 것.
- 색슨 기수의 반환점을 구할 때, 그가 도착하는 순간이 아니라 $t = 0$에서의 노르만 군대의 위치를 쓰는 것.
- 마지막 부분에서 "그들은 만나지 않는다"라고만 말하는 것. 두 경우 모두 두 번째로 지나치기는 하지만, 같은 방향으로 가면서 한쪽이 다른 쪽을 추월한다.

STEP 너머

이와 같은 그래프는 **세계선**(*world line*)으로, 특수 상대성 이론(special relativity)의 기본 도구이다. 특수 상대성 이론에서는 움직이는 관찰자들 사이에 주고받는 빛 신호를 정확히 이런 방식으로 분석하며(레이더 방법), 직선의 기울기는 상대 속도를 나타낸다. 여기서 한 속력에는 u를 더하고 다른 속력에서는 u를 빼는 계산은 갈릴레이(Galilei) 상대 속도이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 갈릴레이적 관점과 상대론적 관점을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.