풀이

# STEP I 2007, 문제 1

순수수학 • 숫자 배열의 개수 세기

> **STEP I 2007, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q1

## 핵심 아이디어

균형수(balanced number)를 하나하나 나열하려고 하지 말자. 대신 두 자릿수 합의 공통값 $s$에 따라 분류한다. 각 $s$에 대하여 앞의 두 자리와 뒤의 두 자리는 서로 독립적으로 고를 수 있으므로, 그 합을 갖는 균형수의 개수는 두 개수의 곱이 된다. 그러면 모든 것은 $s$를 두 숫자의 합으로 나타내는 방법의 수를 세는 문제로 귀결되는데, 이는 정사각형 격자의 대각선 위에 있는 격자점(lattice point)의 개수를 세는 것과 같다.

## 풀이

네 자리 균형수를 $abcd$로 쓰자. 여기서 각 숫자는 $\{0, 1, \ldots, k\}$에 속하고, $a \geq 1$(맨 앞자리는 0일 수 없다)이며, $0 \leq s \leq 2k$인 어떤 $s$에 대하여

$$a + b = c + d = s$$

이다. 각 $s$에 대하여 다음과 같이 둔다.

- $N(s)$는 $c + d = s$를 만족하는 숫자의 순서쌍(ordered pair) $(c, d)$의 개수이다.
- $M(s)$는 $a \geq 1$이고 $a + b = s$를 만족하는 숫자의 순서쌍 $(a, b)$의 개수이다.

$s$를 고정하면 허용되는 앞쪽 쌍은 허용되는 뒤쪽 쌍 어느 것과도 짝지을 수 있으므로, 자릿수 합이 $s$인 균형수의 개수는 $M(s)N(s)$이다. 서로 다른 $s$의 값은 서로 다른 수를 주므로

$$\text{총개수} = \sum_{s=0}^{2k} M(s)\, N(s).$$

### 쌍의 개수 세기

$N(s)$. $0 \le s \le k$이면 $c$는 $0, 1, \ldots, s$ 중 어느 것이든 될 수 있고, $d = s - c$는 자동으로 숫자가 된다. 따라서 $N(s) = s + 1$이다. $k < s \le 2k$이면 $d = s - c \le k$에서 $c \ge s - k$이어야 하므로 $c$는 $s - k$부터 $k$까지 변하고, $N(s) = 2k + 1 - s$이다.

$M(s)$. 이는 같은 개수에서 $a = 0$인 쌍이 존재하면 그것만 빼면 된다. 그 쌍은 $(0, s)$이고, $s \le k$일 때만 허용된다. 따라서

$$M(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le k, \\ 2k + 1 - s, & k < s \le 2k. \end{cases}$$

특히 $M(0) = 0$이다. 즉 자릿수 합이 0인 균형수는 없는데, $a \ge 1$이므로 이는 옳다.

> **생각해 보기** $a + b = c + d$인 네 자리 숫자열을 모두 세고 거기서 끝내면 왜 안 될까?

0312와 같은 숫자열은 네 자리 수가 아니기 때문이다. 조건 $a \ge 1$은 앞쪽 쌍에만, 그것도 합이 작을 때에만 영향을 주며, 바로 이 때문에 $M(s)$와 $N(s)$는 $s \le k$일 때에만 다르다.

### 소문항 (i)

여기서 $k = 4$이고, 합은 0부터 8까지 변한다.

| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M(s)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $N(s)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $M(s)N(s)$ | 0 | 2 | 6 | 12 | 20 | 16 | 9 | 4 | 1 |

맨 아래 행을 더하면 $(2 + 6 + 12 + 20) + (16 + 9 + 4 + 1) = 40 + 30 = 70$이다. 따라서 숫자 0부터 4까지로 만들 수 있는 네 자리 균형수는 요구한 대로 70개이다.

### 소문항 (ii)

이제 $M$과 $N$에 대한 공식을 이용하여 합을 $s = k$에서 나눈다.

$$\text{총개수} = \sum_{s=1}^{k} s(s+1) \; + \; \sum_{s=k+1}^{2k} (2k + 1 - s)^2.$$

($s = 0$인 항은 0이다.) 두 번째 합에서 $r = 2k + 1 - s$로 둔다. $s$가 $k+1$부터 $2k$까지 변할 때 $r$은 $k$부터 1까지 내려가므로, 두 번째 합은 $\sum_{r=1}^{k} r^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{총개수} &= \sum_{r=1}^{k}(r^2 + r) + \sum_{r=1}^{k} r^2 = 2\sum_{r=1}^{k} r^2 + \sum_{r=1}^{k} r \\ &= \tfrac{1}{3}k(k+1)(2k+1) + \tfrac{1}{2}k(k+1) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)\big(2(2k+1)+3\big) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sum r^2$에 대해 주어진 항등식($r = 0$인 항은 기여하지 않는다)과 $\sum_{r=1}^{k} r = \frac{1}{2}k(k+1)$을 이용하였다. 이것이 요구한 결과이다.

## 검산

- 공식에 $k = 4$를 대입하면 $\frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 21 = 70$이 되어 소문항 (i)과 일치한다.
- $k = 1$이면 공식은 3을 준다. 직접 확인하면 0과 1만 사용하는 네 자리 균형수는 1001, 1010, 1111이다.
- $a \geq 1$인 모든 숫자열 $abcd$에 대한 전수 조사(brute force)로 센 개수는 1부터 15까지의 모든 $k$에 대해 공식과 일치한다(예를 들어 십진법의 숫자 전체를 쓰는 $k = 9$일 때 615).

## 흔한 실수

- 맨 앞자리 조건을 잊는 것. 그러면 대신 $\sum N(s)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2k^2+4k+3)$을 얻게 되며, 이는 $k = 4$일 때 85이다.
- $s > k$일 때 쌍의 개수를 잘못 세는 것. 두 숫자 모두 $k$ 이하로 제한되므로 그 개수는 $s+1$이 아니라 $2k+1-s$이다.
- 가운데 합 $s = k$를 나눈 두 부분 모두에서 세거나, 어느 쪽에서도 세지 않는 것.

## STEP 너머

개수 $N(s)$는 $(1 + x + \cdots + x^k)^2$에서 $x^s$의 계수이고, 균형수의 총개수는 이러한 다항식들의 곱의 한 계수이다. 이 **생성함수**(*generating function*) 방법은 직접 세기로는 금세 감당할 수 없게 되는 $2n$자리 균형수도 다룰 수 있다. 이는 대학 조합론의 핵심 도구이다. 이런 성격의 세기 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.