풀이

STEP III 2006, 문제 9

역학 • 에너지 보존

STEP III 2006, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

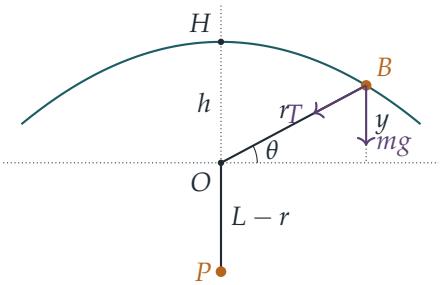
step.maths.org/questions/06-s3-q9

핵심 아이디어

실의 길이가 일정하므로, 구슬이 O에서 멀어진 거리만큼 입자 P는 똑같이 올라간다. 이 사실이 두 퍼텐셜 에너지(potential energy)를 하나로 묶어 준다. 즉 전체 퍼텐셜 에너지는 $y + r$에만 의존한다. "모든 위치에서 평형(equilibrium)"이라는 말은 퍼텐셜 에너지가 특별히 선호하는 위치가 없다는 뜻이므로, 퍼텐셜 에너지는 철사를 따라 일정해야 한다. 일단 일정하다는 것을 알면 에너지 보존(energy conservation)에 의해 전체 운동 에너지(kinetic energy)는 결코 변하지 않으며, 나머지는 구슬의 속력을 극좌표(polar coordinates)로 쓰는 일뿐이다.

풀이

모형. P와 B는 질량이 m인 입자이다. 실은 가볍고 늘어나지 않으며, 고리와 철사는 매끄럽다. 따라서 실의 장력(tension)이 하는 알짜 일은 없고, 철사의 수직항력(normal reaction)도 일을 하지 않는다. O를 원점으로 잡고, x는 수평 방향, y는 연직 위 방향으로 잡으며, 실의 길이를 L이라 하자.



철사의 모양

O에서 B까지의 실의 길이가 r이므로 길이 OP는 $L-r$이고, P는 O보다 $L-r$만큼 아래에 있다. O를 지나는 수평면을 퍼텐셜 에너지의 기준(0)으로 잡으면, 전체 퍼텐셜 에너지는

$$U = mgy - mg(L-r) = mg(y+r) - mgL.$$

이다. 이 계의 자유도(degree of freedom)는 하나(철사 위에서 구슬의 위치)이고, 평형 위치는 철사를 따라 본 U의 정류점(stationary point)이다. 모든 위치가 평형이라면 철사 위 모든 곳에서 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s = 0$이므로($s$는 호의 길이(arc length)이다) U는 철사를 따라 일정하다. 따라서 $y+r$는 일정하다.

H에서 구슬은 O의 바로 위 높이 h에 있으므로 그곳에서 $y = h$, $r = h$이고, 그 상수는 $2h$이다. 그러므로 철사는

$$y + r = 2h,$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. (직교좌표로 쓰면 $x^2 + y^2 = (2h-y)^2$에서 $y = h - x^2/(4h)$를 얻는다. 이는 그림에서처럼 초점(focus)이 O인 포물선(parabola)이다. 평형을 직접 확인할 수도 있다. P가 평형 상태이므로 장력은 mg이고, BO 방향의 mg와 아래 방향의 mg의 합력은 두 방향 사이의 각을 이등분한다. 포물선의 반사 성질(reflection property)에 의해, 이것은 정확히 그 점에서 포물선의 법선 방향이다.)

θ의 변화율

철사 위에서 $y = 2h - r$이므로

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2h}{r} - 1.$$

이다. 시간에 대해 미분하면

$$\cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2}.$$

이다. $\theta = \arcsin(y/r)$는 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 속하므로 $\cos\theta \geq 0$이고, 따라서

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2h-r}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - (2h-r)^2}}{r} = \frac{\sqrt{4rh - 4h^2}}{r} = \frac{2\sqrt{rh-h^2}}{r}.$$

이다. 구슬이 H를 떠난 뒤에는 $r > h$이다($r = 2h - y$이고 H가 아닌 곳에서는 $y < h$이기 때문이다). 그러므로 $\cos\theta \neq 0$이어서 나눌 수 있다.

$$\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2} \cdot \frac{r}{2\sqrt{rh-h^2}} = -\frac{h\dot{r}}{r\sqrt{rh-h^2}},$$

이것이 구하려던 결과이다.

P의 속력

생각해 보기 전체 운동 에너지가 왜 $\frac{1}{2}mV^2$로 계속 유지되어야 하는가?

계에 일을 하는 힘은 중력과 (내부의) 실의 장력뿐이다. 장력이 하는 알짜 일은 없다. 실은 늘어나지 않고 고리는 매끄러우므로, 장력이 B에 하는 일과 P에 하는 일이 서로 상쇄된다. 철사는 매끄러우므로 그 반작용도 일을 하지 않는다. 따라서 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합은 보존된다. 그런데 방금 이 철사를 따라 퍼텐셜 에너지 U가 일정하다는 것을 보였으므로, 운동 에너지도 일정하다.

처음에 구슬은 H에 있고, 그곳에서 r는 최솟값 h를 가진다(그곳에서 y가 가장 크기 때문이다). 그러므로 처음에 $\dot{r} = 0$이고, 속력이 $|\dot{r}|$인 P는 정지 상태에서 출발한다. 따라서 처음 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2$이다.

O에 대한 극좌표에서 구슬의 속력의 제곱은 $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$이다. $\dot{\theta}$에 대한 결과를 이용하면

$$r^2\dot{\theta}^2 = \frac{h^2\dot{r}^2}{rh - h^2} = \frac{h\dot{r}^2}{r-h}, \qquad \text{이므로} \qquad v_B^2 = \dot{r}^2\left(1 + \frac{h}{r-h}\right) = \frac{r\dot{r}^2}{r-h}.$$

이다. 운동 에너지 보존에서 $\frac{1}{2}m$을 약분하면

$$\frac{r\dot{r}^2}{r-h} + \dot{r}^2 = V^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}^2\,\frac{2r-h}{r-h} = V^2.$$

을 얻는다. $r > h$이므로 $r-h$와 $2r-h$는 모두 양수이고, P의 속력은

$$|\dot{r}| = V\left(\frac{r-h}{2r-h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- H에서 $r = h$이고 공식은 0을 준다. 이는 옳다. 처음에 P가 정지해 있기 때문이다.
- $r \to \infty$이면 P의 속력은 $V/\sqrt{2}$로 수렴(converge)한다. 멀리 나가면 구슬은 거의 지름 방향으로 움직이므로, B와 P의 속력이 거의 같아지고 운동 에너지를 똑같이 나누어 가진다.
- 수치적으로, $h = 1$, $V = 2$로 두고 $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$를 따라 구슬의 운동 방정식을 (RK4로) 단계별로 풀어, $\dot{\theta}$와 $\dot{r}$의 유한 차분 값을 공식과 비교하였다. $r \approx 4.043$에서 P의 속력은 1.31064였고, 이는 $2\sqrt{3.043/7.087}$와 유효숫자 여섯 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- P의 퍼텐셜 에너지를 $+mg(L-r)$로 잡는 것. P는 O보다 아래에 있으므로 그 높이는 $-(L-r)$이다.
- P도 움직인다는 것을 잊고 $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mV^2$로 쓰는 것.
- $\cos\theta$로 나누면서, 그 값이 H에서만 0이 된다는 점을 짚지 않는 것.

STEP 너머

계가 모든 곳에서 "중립" 평형을 이루는 곡선을 찾는 일은, 평형이 퍼텐셜 에너지의 정류점이라는 원리의 작은 예이다. 이 원리는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어지는데, 거기서는 실이나 철사 같은 구속 조건(constraints)을 좋은 좌표를 골라 처음부터 반영한다. 여기서는 하나의 좌표 r로 충분하며, 에너지 보존이 제1적분(first integral)이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 극좌표를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.