풀이

STEP III 2006, 문제 8

순수수학 • 공리적 미분

> **STEP III 2006, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q8

핵심 아이디어

네 가지 규칙은 우리가 매일 쓰는 미분(differentiation)의 성질 그 자체이다. 곧 선형성(linearity)과 곱의 법칙(product rule), 그리고 x를 "미분하면" 1이 된다는 사실 하나이다. 모든 다항식(polynomial)은 수 1과 문자 x로부터 곱하기와 더하기를 거듭하여 만들어진다. 따라서 $\triangle$이 1과 x에 어떻게 작용하는지 알면, 나머지 모든 곳에서는 규칙들이 $\triangle$에 아무런 자유도 남기지 않는다. $x \cdot x^n$에 곱의 법칙을 적용하면 거듭제곱에 대한 귀납법(induction)이 나오고, 그다음은 선형성이 마무리한다.

풀이

이 풀이 전체에서 "규칙 (i)"부터 "규칙 (iv)"까지는 주어진 순서대로 네 가지 정의 규칙을 가리킨다.

상수

먼저 상수 다항식 1을 생각한다. $1 = 1 \cdot 1$이므로, $f(x) = g(x) = 1$로 두고 규칙 (iv)를 적용하면

$$\triangle 1 = \triangle(1 \cdot 1) = 1 \cdot \triangle 1 + 1 \cdot \triangle 1 = 2\triangle 1.$$

양변에서 $\triangle 1$을 빼면 $\triangle 1 = 0$(영다항식)을 얻는다.

> **생각해 보기** 그냥 "도함수처럼 상수에 $\triangle$을 취하면 영이다"라고 말하면 안 되는 이유는 무엇일까?

우리는 아직 $\triangle$이 도함수(derivative)라는 사실을 모르기 때문이다. 그것이 바로 마지막 부

분에서 증명하라고 요구하는 내용이다. 우리가 쓸 수 있는 것은 네 가지 규칙뿐이며, 그중 어느 것도 상수를 직접 언급하지 않는다. 요령은 1이 자기 자신의 제곱이라는 점이다. 그래서 곱의 법칙에 의해 $\triangle 1$은 자기 자신의 두 배와 같아질 수밖에 없다.

이제 $f(x) = \lambda$를 임의의 상수라 하자. 그러면 $\lambda = \lambda \cdot 1$이므로 규칙 (iii)에 의해

$$\triangle\lambda = \triangle(\lambda \cdot 1) = \lambda \triangle 1 = \lambda \cdot 0 = 0.$$

따라서 차수(degree)가 영인 모든 다항식에 대하여 $\triangle f(x) = 0$이며, 이것이 보이려던 것이다.

제곱과 세제곱

$x^2 = x \cdot x$로 쓰고 규칙 (iv)와 규칙 (i)을 차례로 적용하면

$$\triangle x^2 = x \triangle x + x \triangle x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x.$$

$x^3 = x \cdot x^2$로 쓰고 규칙 (iv)를 적용한 다음, 방금 얻은 결과와 규칙 (i)을 쓰면

$$\triangle x^3 = x \triangle x^2 + x^2 \triangle x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

일반적인 다항식

1단계: x의 거듭제곱. 다음을 귀납법으로 증명한다.

$$\triangle x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

$n = 1$일 때 이 식은 $\triangle x = 1$이고, 이는 규칙 (i)이다. 어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. $x^{k+1} = x \cdot x^k$이므로 규칙 (iv)에 의해

$$\begin{aligned} \triangle x^{k+1} &= x \triangle x^k + x^k \triangle x \\ &= x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)\, x^k, \end{aligned}$$

이다. 여기서 둘째 줄에서는 귀납 가정(induction hypothesis)과 규칙 (i)을 썼다. 따라서 결과는 $n = k+1$일 때도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다. $n = 0$일 때는 $x^0 = 1$이고 앞에서 $\triangle 1 = 0$임을 보였으므로, 이는 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 = 0$과 일치한다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여

$$\triangle x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n.$$

2단계: 여러 항의 합. 규칙 (ii)는 두 다항식에 대해 진술되어 있지만, 임의의 유한 개로 확장된다. $\triangle(f_1 + \cdots + f_m) = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_m$이라 하면, 두 다항식 $f_1 + \cdots + f_m$과 f_{m+1}에 규칙 (ii)를 적용하여

$$\triangle(f_1 + \cdots + f_{m+1}) = \triangle(f_1 + \cdots + f_m) + \triangle f_{m+1} = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_{m+1},$$

을 얻는다. 따라서 m에 대한 귀납법에 의해 항의 개수가 몇 개이든 성립한다.

3단계: **종합하기**. 임의의 다항식은 상수 a_k를 써서 $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$로 쓸 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned}
\triangle h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \triangle\left(a_k x^k\right) && \text{2단계에서 확장한 규칙 (ii)에 의해} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \triangle x^k && \text{규칙 (iii)에 의해} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} && \text{1단계에 의해 } (k=0\text{인 항은 } 0) \\
&= \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

이며, 마지막 줄은 다항식의 통상적인 도함수이다. 이는 모든 다항식 $h(x)$에 대하여 성립하므로 $\triangle h(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$이고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

보통의 미분이 네 가지 규칙을 모두 만족한다는 사실은 안심이 된다. 즉 규칙들이 서로 모순되지 않으며, $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$는 실제로 문제에서 묘사한 종류의 연산이다. 곱의 법칙을 공식과 비교하여 확인할 수도 있다. $f = x^2$, $g = x^3$에 대하여 규칙 (iv)는 $x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2x = 5x^4$을 주는데, 이는 $\triangle x^5$이다. 컴퓨터에서 오직 규칙들만으로(1단계부터 3단계까지처럼) $\triangle$을 구현하고, 차수가 9 이하인 무작위 다항식 2000개에 대하여 도함수와 정확히 비교해 보았다. 예를 들어 $\triangle\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x + 7\right) = 2x^3 - 3$이며, 이는 수치적인 차분몫(difference quotient)과도 일치한다.

흔한 실수

- "도함수이니까"라는 이유로 $\triangle(\text{상수}) = 0$이라고 단정하는 것. 이는 최종 답을 미리 가정하는 것이며, 규칙들로부터 유도해야 한다.
- 긴 합에 아무 설명 없이 규칙 (ii)를 쓰는 것. 이 규칙은 두 다항식에 대해 진술되어 있으므로, 더 많은 항에 쓰려면 귀납법에 관한 한 문장이 필요하다.
- 어느 곳에서 어느 규칙을 썼는지 밝히지 않는 것. 문제에서 이를 명시적으로 요구한다.

STEP 너머

선형성과 곱의 법칙을 만족하는 연산을 **도분**(derivation)이라 한다. 여기서의 논증은 다항식 위의 도분이 x에서의 값만으로 완전히 결정된다는 것을 보여 준다. 만약 어떤 다항식 p에

대하여 $\triangle x = p(x)$라면, 같은 증명으로 $\triangle h = p(x)\,h'(x)$를 얻는다. 극한을 전혀 쓰지 않고 미분을 대수적으로 정의할 수 있다는 생각은 추상대수학(abstract algebra)과 미분기하학(differential geometry)에서 핵심적이다. 미분기하학에서 벡터장(vector field)은 정확히 함수 위의 도분이다. 다항식환(polynomial ring)을 대수적으로 다루는 내용을 처음 접하기에는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.