풀이

STEP III 2006, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP III 2006, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q7

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$에 대한 이차식(quadratic)이다. 처음부터 미분방정식으로 공략하기보다는 각 이차식을 도함수(derivative)에 대해 풀어서, 방정식을 두 개의 평범한 1계(first-order) 방정식으로 나눈다. 쌍곡선함수 항등식(hyperbolic identities)을 쓰면 근이 간단한 꼴로 정리되고, $x = 0$에서의 조건을 보면 어느 근을 따라가야 하는지 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$u = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

이다. $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$이고 $\cosh x > 0$이기 때문이다. $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$와 $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$를 이용하면 두 근(root)은

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{또는} \qquad u = -\mathrm{e}^x.$$

이다.

주어진 미분방정식은 이 이차식에서 $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$로 둔 것이므로, 모든 x에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{또는} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^x.$$

이어야 한다. 첫째 근은 항상 양수이고 둘째 근은 항상 음수이므로 두 근은 결코 일치하지 않는다. 따라서 도함수가 연속인 해는 한 근에서 다른 근으로 건너뛸 수 없고, $x = 0$에서의

조건 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 0$에 의해 구간 전체에서 첫째 근이 선택된다. 적분하면 $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$이고, $x = 0$에서 $y = 0$이므로 $c = 1$이다:

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

소문항 (ii)

$p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$라 하자. $\sinh y = 0$, 즉 $y = 0$이면 방정식은 $2p = 0$이 된다. $y \equiv 0$이 해가 되는 것은 이 때문이며, 이것이 바로 문제에서 제외하라고 한 해이다. $y \neq 0$인 곳에서는 근의 공식에 의해

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{-1 \pm \cosh y}{\sinh y}.$$

이다. 반각 공식(half-angle forms) $\cosh y - 1 = 2\sinh^2 \frac{y}{2}$, $\cosh y + 1 = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$, $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$를 쓰면 두 근은

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \frac{y}{2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\coth \frac{y}{2}.$$

이다. 두 근의 곱은 -1인 반면, 두 근이 같다면 그 곱은 $\tanh^2 \frac{y}{2} \geq 0$이어야 하므로 두 근은 결코 일치하지 않는다.

생각해 보기 두 방정식 가운데 어느 것이 원점을 지나면서 항등적으로 0이 아닌 해를 줄 수 있을까?

첫째 방정식 $y' = \tanh \frac{y}{2}$는 해 $y \equiv 0$을 가진다. 우변이 y에 대한 매끄러운 함수이므로, $(0,0)$을 지나는 해는 이것뿐이다. 즉 이것은 다시 자명한 해(trivial solution)이다. 둘째 방정식은 $y = 0$에서 특이하여 $|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x| \to \infty$이므로, 그 해곡선은 수직 접선(vertical tangent)을 가지며 $y = 0$과 만날 수 있다. 우리가 원하는 것은 바로 이 해이다. 변수분리(separation of variables)를 하면

$$\int \tanh \frac{y}{2}\, \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad 2\ln\cosh \frac{y}{2} = -x + C.$$

이다. $x = 0$에서 $y = 0$을 대입하면 $C = 0$이므로 $\cosh^2 \frac{y}{2} = \mathrm{e}^{-x}$이다. $\cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2} - 1$이므로

$$\cosh y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

이다. 이를 직접 확인할 수 있다. 미분하면 $\sinh y\, y' = -2\mathrm{e}^{-x} = -(\cosh y + 1)$이고, 이는 정확히 $y' = -\coth \frac{y}{2}$이다. 이 계산은 y의 부호에 관계없이 성립하므로, 위쪽 절반과 아래쪽 절반을 포함한 곡선 전체가 해이다. $\cosh y \geq 1$이므로 곡선은 $x \leq 0$에서만 존재한다. 곡선은 x축에 대하여 대칭이다. 원점 근처에서는 $1 + \frac{1}{2}y^2 \approx 1 - 2x$이므로, 곡선은 그곳에서 포물선(parabola) $y^2 = -4x$처럼 보인다.

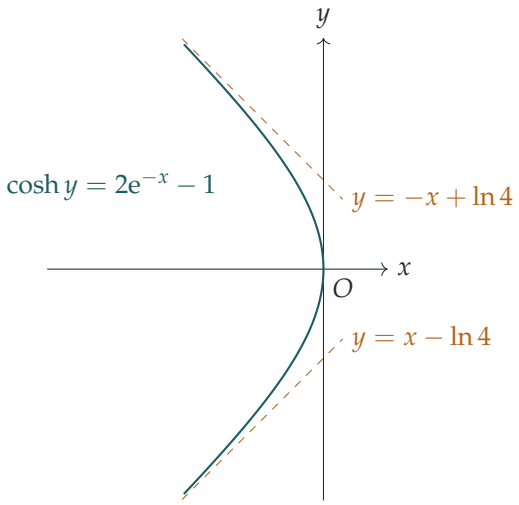
점근선. $x \to -\infty$일 때 $\cosh y \to \infty$이므로 $|y| \to \infty$이다. $w = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$이라 하자. 그러면

$$|y| = \operatorname{arcosh} w = \ln\left(w + \sqrt{w^2 - 1}\right),$$

이므로

$$|y| - (-x + \ln 4) = \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{4\mathrm{e}^{-x}} = \ln\left(\frac{w}{4\mathrm{e}^{-x}}\left(1 + \sqrt{1 - w^{-2}}\right)\right).$$

이다. $x \to -\infty$일 때 $w/(4\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} \to \frac{1}{2}$이고 $1 + \sqrt{1 - w^{-2}} \to 2$이므로, 로그 안의 값은 1로 수렴하고 그 차는 0으로 수렴한다. 따라서 곡선의 위쪽 절반은 $y = -x + \ln 4$에 가까워지고, 대칭성에 의해 아래쪽 절반은 $y = -(-x + \ln 4)$에 가까워진다. 그러므로 점근선(asymptote)은 문제에서 요구한 대로 $y = \pm(-x + \ln 4)$이다. ($x \to 0^-$일 때 곡선은 유계이므로, 점근선은 이 둘뿐이다.)



검산

- (i)에서 $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$이면 $y' = \mathrm{e}^{-x}$이고, $\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\sinh x - 1 = \mathrm{e}^{-2x} + (1 - \mathrm{e}^{-2x}) - 1 = 0$이다.
- (ii)에서 $y' = -\coth\frac{y}{2}$를 원점 근처에서부터 $x = -6$까지 수치적으로 계산하면 $y \approx 7.38505$를 얻으며, 이는 $\operatorname{arcosh}(2\mathrm{e}^6 - 1)$과 일치한다. $x = -10$에서 곡선과 $-x + \ln 4$ 사이의 차이는 약 2×10^{-5}이다.

흔한 실수

- (i)에서 근 $-\sinh x - \cosh x = -\mathrm{e}^{x}$를 택하는 것: 이 근은 $x = 0$에서 도함수가 음수이다.
- (ii)에서 $y = 0$에서 "잘 행동한다"는 이유로 $y' = \tanh \frac{y}{2}$를 고르는 것. 이 방정식은 원점을 지나는 해로 $y \equiv 0$만을 준다.
- $y < 0$인 곡선의 아래쪽 절반을 잊는 것. 이 부분은 두 번째 점근선을 얻는 데 필요하다.

STEP 너머

이 문제의 방정식들처럼 y'에 대해 선형이 아닌 방정식을 **1계 음함수**(*first-order implicit*) 방정식이라 한다. 이를 y'에 대해 풀면 여러 갈래(branch)로 나뉜다. 소문항 (ii)는 해의 유일성(uniqueness)이 깨질 수 있다는 것도 보여 준다. $y = 0$에서 우변 $-\coth \frac{y}{2}$는 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않으며, 그 때문에 자명하지 않은 해가 $y \equiv 0$과 같은 점에서 출발할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorems)와 그 정리들이 적용되는 조건을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.