풀이

STEP III 2006, 문제 6

순수수학 • 극곡선과 반사

> **STEP III 2006, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q6

핵심 아이디어

기울기 공식은 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$에 연쇄법칙(chain rule)을 적용한 것에 지나지 않는다. 거울 문제에서는 극(pole)을 O에 두고 시초선(initial line)을 L 방향으로 잡는다. 그러면 점 P에서 반사된 광선은 반지름을 따라 곧장 되돌아가므로, 그 방향은 θ만으로 정해진다. 반사의 법칙(law of reflection)에 따르면 법선(normal)은 두 광선이 이루는 각을 이등분하므로, 법선(따라서 접선(tangent)도)이 θ로 결정된다. 이렇게 하면 기하 문제가 $r(\theta)$에 대한 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)으로 바뀐다.

풀이

극좌표(polar coordinates)에서의 기울기

$r = r(\theta)$로 주어진 곡선의 직교좌표는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이고, 여기서 r는 θ의 함수이다. 곱의 미분법(product rule)으로 θ에 대해 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

연쇄법칙에 의해 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$인 곳에서는

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

이고, 마지막 등식은 분자와 분모를 $\cos\theta$로 나눈 것이다($\cos\theta \neq 0$일 때 가능하다). 이것이 구하는 기울기이다.

나누기 전의 형태도 기억해 둘 만하다. 벡터

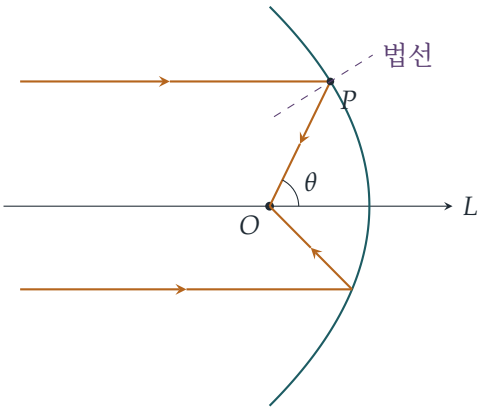
$$\mathbf{t} = \left(\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\ \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

는 $\tan\theta$나 기울기가 정의되지 않는 점까지 포함하여, 곡선의 모든 점에서 접선 방향을 가리킨다.

거울

L을 포함하는 임의의 평면 Π를 잡고, 거울과 Π가 만나는 점을 P라 하자. P에서의 입사 광선은 L에 평행하므로 Π 위에 있다. 반사 광선은 L 위의 점 O를 지나므로 역시 Π 위에 있다. 또한 반사의 법칙에 따르면 P에서의 법선은 두 광선이 이루는 평면 위에 있으므로, 법선은 Π 위에 있고, P에서 교선의 접선은 Π 안에서 법선에 수직인 직선이다. 따라서 모든 일이 평면 Π 안에서 일어나므로 2차원에서 생각하면 된다.

Π에서 극을 O로, 시초선을 L 방향으로 하는 극좌표를 쓰되, 입사광이 $\theta = 0$ 방향(그림에서 왼쪽에서 오른쪽)으로 진행하도록 방향을 잡는다. P를 (r, θ), $-\pi < \theta < \pi$라 하자. ($\theta = \pi$인 점은 L 위에서 O의 뒤쪽에 있으며, 그곳의 광선은 거울 없이도 O를 곧장 지난다.)



법선의 방향. P에서 광선을 따라 P로부터 멀어지는 두 단위벡터를 잡는다.

$\mathbf{a} = (-1, 0)$ (입사 광선을 따라 거슬러 가는 방향), $\mathbf{b} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$ (O를 향하는 방향).

법선은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$와 같은 각을 이루므로 두 벡터가 이루는 각의 이등분선(bisector) 위에 있고, 이는 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$의 방향이다(두 단위벡터가 만드는 마름모(rhombus)의 대각선은 두 벡터 사이의 각을 이등분한다). 이제

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -(1 + \cos\theta,\ \sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

이고, 여기서 $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 이용하였다. $-\pi < \theta < \pi$이므로 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$이고, 따라서 이 벡터는 영벡터가 아니며 P에서의 법선은

$$\mathbf{n} = \left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right) :$$

방향이다. 즉 법선은 L과 각 $\frac{\theta}{2}$를 이룬다.

생각해 보기 기울기 공식을 접선의 기울기와 같다고 놓으면 되지 않을까?

그렇게 할 수도 있다. 접선은 $\mathbf{n}$에 수직이므로 그 기울기는 $-\cot\frac{\theta}{2}$이고, 이를 극좌표 공식과 같다고 놓고 분모를 없애면 아래와 같은 방정식이 나온다. 하지만 이 방법은 $\tan\theta$, $\cot\frac{\theta}{2}$와 공식의 분모로 나누는 과정을 거치므로 $\theta = 0$과 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$에서 성립하지 않는다. 접선벡터 $\mathbf{t}$를 쓰면 이런 문제를 모두 피할 수 있다.

미분방정식. 접선은 법선에 수직이므로 $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$이다.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right) + r\left(\cos\theta\sin\tfrac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}\right) = 0.$$

삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)에 의해 괄호 안은 각각 $\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$와 $\sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta\right) = -\sin\frac{\theta}{2}$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\tfrac{\theta}{2} = r\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

이고, 이는 $r\cos\frac{\theta}{2}$로 나눈 것인데, $P \neq O$이고 $-\pi < \theta < \pi$이므로 이 값은 양수이다.

방정식 풀기. 이 방정식은 변수분리형이다. θ에 대해 적분하고, $\int\tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$임($\cos\frac{\theta}{2} > 0$이므로 성립)에 주의하면

$$\ln r = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad r\cos^2\tfrac{\theta}{2} = k,$$

이다. 여기서 $k = \mathrm{e}^C > 0$는 곡선 위에서 일정한 상수이다(곡선은 구간 $-\pi < \theta < \pi$에서 $r = r(\theta)$로 주어지는 연결된 한 조각이다). $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$를 쓰면

$$r(1 + \cos\theta) = 2k.$$

직교좌표로 바꾸기. $x = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$를 대입하면 $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$가 된다. $2k - x = r \geq 0$이므로 양변이 모두 음이 아니고, 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 = 4k^2 - 4kx + x^2 \qquad\Longrightarrow\qquad y^2 = 4k(k - x).$$

이것은 축이 L이고 꼭짓점(vertex)이 $(k, 0)$, 초점(focus)이 원점 O이며, 들어오는 빛 쪽을 향해 열린 포물선(parabola)이다. Π는 L을 포함하는 임의의 평면이었으므로, 거울은 그러한 모든 평면과 포물선에서 만난다. 이로써 증명이 끝난다. ■

검산

- 거꾸로 확인해 보자. $y^2 = 4k(k-x)$ 위에서 법선은 $(4k, 2y)$ 방향이고, 방향 $(1,0)$을 이 법선에 대해 반사하면 O를 지나는 광선이 된다. $k = 1.3$으로 놓고 무작위로 고른 10^4개의 점에서 이를 수치적으로 확인하였고, $r = 2k/(1+\cos\theta)$가 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$를 만족함도 유한차분(finite differences)으로 확인하였다.
- 무작위 곡선 $r(\theta)$에 대해 기울기 공식은 유한차분으로 구한 기울기와 약 10^{-8} 정도까지 일치하였다.
- $\theta = 0$에서 법선은 L 위에 있고 접선은 L에 수직이다. 이 점이 꼭짓점 $(k,0)$이며, L을 따라 들어온 광선은 여기서 반사되어 O를 지나 곧장 되돌아간다.

흔한 실수

- 법선으로 외각 이등분선(external bisector) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$를 쓰는 것. 이 방향은 두 광선과 같은 각이 아니라 서로 보각(supplementary angles)을 이루며, $r'/r = -\cot\frac{\theta}{2}$로 이어진다. 그 해 $r(1-\cos\theta) = 2k$는 반대쪽을 향한 포물선으로, 반대 방향에서 들어오는 빛을 모은다.
- 문제가 왜 2차원 문제가 되는지 설명하지 않는 것. 법선이 L과 P를 포함하는 평면 위에 있어야 하며, 그렇지 않으면 교선이 우리가 사용한 접선을 가진다고 할 수 없다.
- 양변이 음이 아님을 언급하지 않고 $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$를 제곱하는 것.

STEP 너머

이 거울은 회전포물면(paraboloid of revolution)이며, 여기서 증명한 성질은 초점–준선(focus–directrix) 성질이 모습을 바꾼 것이다. $r(1+\cos\theta) = 2k$는 O까지의 거리가 직선 $x = 2k$까지의 거리와 같다는 뜻이다. 위성 안테나, 자동차 전조등, 반사 망원경이 회전포물면 모양인 까닭이 여기에 있다. 더 일반적으로, 원뿔곡선(conics)은 모두 $r(1+e\cos\theta) = \ell$이라는 극방정식으로 나타낼 수 있으며, 이는 뉴턴(Newton)이 행성 궤도를 풀 때 나오는 바로 그 식이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 식을 역제곱 법칙(inverse-square law)으로부터 유도한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.