풀이

STEP III 2006, 문제 5

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2006, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q5

핵심 아이디어

삼각형이 정삼각형(equilateral triangle)일 필요충분조건은 한 꼭짓점에서 보았을 때 한 변이 다른 변을 60°만큼 돌린 것이라는 점이다. 복소수(complex numbers)에서 이 회전은 $e^{\pm i\pi/3}$을 곱하는 것이고, 이 두 수는 정확히 $t^2 - t + 1 = 0$의 근(roots)이다. 원점을 한 꼭짓점으로 옮기면 대칭식이 바로 그 이차식(quadratic)이 된다. 그다음 삼차방정식(cubic) 부분은 근과 계수의 관계(Vieta's formulae)로 해결되고, 마지막 부분은 $z \mapsto pw + q$가 그림을 회전하고, 확대·축소하고, 평행이동할 뿐이라는 관찰로 해결된다.

풀이

정삼각형 조건

꼭짓점 α에서 나가는 두 변을 $u = \beta - \alpha$, $v = \gamma - \alpha$라 하자. 세 점이 서로 다르므로 $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u \neq v$이다. 먼저 우변을 전개해 보면 알 수 있듯이

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = \tfrac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2],$$

이다. 이제 $\alpha - \beta = -u$, $\gamma - \alpha = v$, $\beta - \gamma = u - v$이므로 대괄호 안은 $u^2 + (u - v)^2 + v^2 = 2(u^2 - uv + v^2)$이다. 따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = u^2 - uv + v^2 = u^2(t^2 - t + 1), \qquad t = \frac{v}{u}.$$

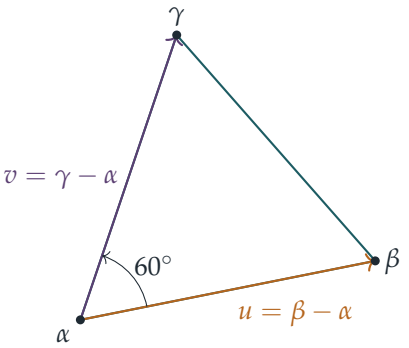
$u \neq 0$이므로 이 식이 0이 될 필요충분조건은 $t^2 - t + 1 = 0$, 즉

$$t = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}.$$

이다.

? **생각해 보기** $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$이 왜 정확히 삼각형이 정삼각형이라는 뜻이 되는가?

v/u의 절댓값(modulus)은 $|\gamma-\alpha|/|\beta-\alpha|$이고, 편각(argument)은 α에서 변 $\alpha\beta$로부터 변 $\alpha\gamma$까지 잰 각이다. 따라서 $v/u = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$은 α에서 나가는 두 변의 길이가 같고 그 사이의 각이 $60°$라는 뜻이다. 이러한 이등변삼각형(isosceles triangle)의 두 밑각은 $\frac{1}{2}(180° - 60°) = 60°$이므로 정삼각형이다. 역으로 삼각형이 정삼각형이면 $|v| = |u|$이고 α에서의 각은 $60°$이며, 방향(orientation)에 따라 한쪽 또는 다른 쪽으로 돌아가므로 $v/u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 또는 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이다.



따라서 서로 다른 세 점이 (어느 순서로든) 정삼각형을 이룰 필요충분조건은 이 식이 0인 것이며, 이것이 보이려던 것이다.

삼차방정식

$(*)$의 근을 α, β, γ라 하자. 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta+\gamma = -a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta &= (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &= a^2 - 3b.\end{aligned}$$

첫 번째 결과에 의해 (서로 다른) 근들이 정삼각형을 이룰 필요충분조건은 $a^2-3b=0$, 즉 $a^2 = 3b$이다.

한 가지 주의할 점이 있다. 첫 번째 결과는 세 점이 서로 다를 것을 요구한다. 두 근이 같다면, 예를 들어 $\alpha = \beta$이면 식은 $(\gamma-\alpha)^2$이 되므로, 세 근이 모두 같을 때에만 0이 된다. 따라서 중복된 근이 있으면서 $a^2 = 3b$인 경우는 삼중근(triple root)일 때뿐이며, 이때 $z^3+az^2+bz+c = (z+\frac{a}{3})^3$, 즉 $c = a^3/27$도 성립한다. 한 점으로 이루어진 이 퇴화된 "삼각형"을 제외하면 $a^2 = 3b$가 정확히 구하는 조건이다.

변환

$(*)$에 $z = pw + q$를 대입하고 $p^3 \neq 0$으로 나누면

$$w^3 + \frac{3q+a}{p}\,w^2 + \frac{3q^2+2aq+b}{p^2}\,w + \frac{q^3+aq^2+bq+c}{p^3} = 0.$$

이다. 따라서

$$A = \frac{3q+a}{p}, \qquad B = \frac{3q^2+2aq+b}{p^2},$$

이고, 그러므로

$$A^2 - 3B = \frac{(9q^2+6aq+a^2) - (9q^2+6aq+3b)}{p^2} = \frac{a^2-3b}{p^2}.$$

이다. $(*)$의 근들이 정삼각형을 이루면 근들은 서로 다르고 $a^2 = 3b$이므로 $A^2 = 3B$이다. $(**)$의 근은 $(*)$의 근 z에 대하여 $w = (z-q)/p$이다. $p \neq 0$이므로 이 사상은 일대일(one-to-one)이고, 따라서 이 근들도 서로 다르다. 앞의 결과에 의해 $(**)$의 근들은 정삼각형을 이룬다.

기하적으로 보면 이것은 놀라운 일이 아니다. $w = (z-q)/p$는 $-q$만큼 평행이동하고, $-\arg p$만큼 회전하고, $1/|p|$배로 확대·축소하는 변환이며, 이 가운데 어느 것도 정삼각형을 망가뜨리지 않는다. 첫 번째 부분의 언어로 말하면 각 변이 p로 나누어지므로 비 v/u는 변하지 않는다.

검산

- 1의 세제곱근 $1, \omega, \omega^2$은 정삼각형을 이루고 $z^3 - 1 = 0$의 근이며, 이때 $a = b = 0$이므로 $a^2 = 3b$가 성립한다.
- $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$일 때 식은 $1 + \gamma^2 - \gamma$이고, $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이 $t^2 - t + 1$의 근이므로 이 값은 0이다.
- 무작위로 뽑은 1000개의 세 수에 대한 수치 검산으로, 그 수들을 근으로 하는 삼차방정식에 대해 $\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta = a^2 - 3b$임을 확인하였다. 같은 검산으로 $A^2 - 3B = (a^2-3b)/p^2$임과, 무작위 p와 q에 대해 정삼각형을 이루는 근들이 여전히 정삼각형을 이룸을 확인하였다.

흔한 실수

- 한쪽 방향만 확인하는 것: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$과 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이 모두 나타나며, "필요충분조건"을 보이려면 둘 다 필요하다.

- u^2으로 나눌 수 있는 근거가 $u \neq 0$(서로 다른 점)이라는 것을 잊는 것.
- 대입 과정에서 B를 잘못 구하는 것: w의 계수는 세제곱에서 나온 $3q^2$, 제곱에서 나온 $2aq$, 그리고 b를 모은 것을 p^2으로 나눈 것이다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto pz + q$는 평면의 닮음변환(direct similarities) 가운데 방향을 보존하는 것들이다. 비 $(\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha)$나 $a^2 - 3b$가 0이라는 사실처럼 이 변환으로 변하지 않는 양을 **불변량**(*invariants*)이라 하며, 이는 기하학과 대수학의 핵심 개념이다. $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$라 할 때, 식 $a^2 - 3b$는 (상수배를 제외하면) f'의 판별식(discriminant)이다. 이는 마든의 정리(Marden's theorem)라는 아름다운 사실과 연결된다. f'의 근은 f의 근들이 이루는 삼각형의 각 변에 그 중점에서 접하는 타원(ellipse)의 초점(foci)이라는 것이다. 정삼각형의 경우 그 타원은 원이 되고, 두 초점은 합쳐져 f'의 중근(double root)이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 바로 이러한 정신으로 복소 기하학을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.