풀이

STEP III 2006, 문제 4

순수수학 • 함수방정식

> **STEP III 2006, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q4

핵심 아이디어

첫 번째 항등식(identity)은 코시(Cauchy)의 함수방정식(functional equation)이다. $y = x$를 대입하면 x에서의 f 값과 $2x$에서의 값 사이의 관계식을 얻고, 이 관계식을 n번 미분(differentiation)한 뒤 $x = 0$을 대입하면 매클로린 계수(Maclaurin coefficient)가 거의 모두 사라진다. 이후의 각 문항은 모두 같은 방정식이 모양만 바꾼 것이다. 변수 변환(change of variable)(로그, 지수, 탄젠트)을 하면 새로운 항등식이 다시 $(*)$로 바뀌므로, 이미 얻은 답을 그대로 쓸 수 있다.

풀이

기본 방정식

$(*)$에 $y = x$를 대입하면 $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(2x)$, 즉

$$2\mathrm{f}(x) \equiv \mathrm{f}(2x).$$

이것은 x에 대한 항등식이므로 양변을 미분할 수 있다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\mathrm{f}(2x)$를 한 번 미분할 때마다 인수 2가 하나씩 나오므로, n번 미분하면

$$2\mathrm{f}^{(n)}(x) \equiv 2^n \mathrm{f}^{(n)}(2x).$$

$x = 0$을 대입하면 $(2 - 2^n)\,\mathrm{f}^{(n)}(0) = 0$이다. $n = 2$일 때 이 식은 $-2\mathrm{f}''(0) = 0$이 되므로, 요구된 대로 $\mathrm{f}''(0) = 0$이다.

같은 논증이 $n \neq 1$인 모든 경우에 성립한다. 인수 $2 - 2^n$은 $n = 1$일 때만 0이 되므로

$$\mathrm{f}(0) = 0 \quad \text{이고} \quad \mathrm{f}^{(n)}(0) = 0 \ \text{모든} n \geq 2.$$

($n = 0$인 경우는 단순히 $2f(0) = f(0)$이다.) 따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)에서 일차항만 남는다.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots = kx, \qquad k = f'(0).$$

역으로 $kx + ky = k(x+y)$이므로 이러한 함수는 모두 조건을 만족한다. $(*)$의 가장 일반적인 해는 $f(x) = kx$이고, 여기서 k는 임의의 상수이다.

소문항 (i)

로그를 취하려면 $g > 0$이어야 하므로, 먼저 부호를 처리한다. $x = y = \frac{1}{2}s$를 대입하면 $g(s) = \left(g(\frac{1}{2}s)\right)^2 \geq 0$이다. 어떤 a에 대해 $g(a) = 0$이면, 모든 x에 대해

$$g(x) = g(a)\,g(x-a) = 0,$$

이므로 $g \equiv 0$이고, 이 함수는 실제로 항등식을 만족한다. 그렇지 않으면 모든 x에 대해 $g(x) > 0$이고, $G = \ln g$가 모든 곳에서 정의된다. $g(x)g(y) = g(x+y)$의 양변에 로그를 취하면

$$G(x) + G(y) = G(x+y),$$

이고, 이것은 정확히 $(*)$이다. 따라서 $G(x) = kx$이고,

$$g(x) = e^{kx}$$

이다. 여기서 k는 상수이며, $e^{kx}e^{ky} = e^{k(x+y)}$이므로 이 함수가 조건을 만족함은 분명하다. 자명한 해 $g \equiv 0$을 제외하면 이것이 해의 전부이다.

소문항 (ii)

모든 양수 x는 정확히 하나의 실수 u, 즉 $u = \ln x$에 대해 e^u로 나타난다. 따라서 $x = e^u$, $y = e^v$로 쓸 수 있고, 이때 u와 v는 **모든** 실수 범위를 움직인다. 그러면 $xy = e^{u+v}$이고, 항등식은 모든 실수 u, v에 대해

$$H(u) + H(v) = h(e^u) + h(e^v) = h(e^{u+v}) = H(u+v)$$

가 된다. 이것은 다시 $(*)$이므로 $H(u) = ku$이다. $u = \ln x$이므로

$$h(x) = k\ln x \qquad (x > 0),$$

이고, $\ln x + \ln y = \ln(xy)$이므로 이 함수는 조건을 만족한다.

소문항 (iii)

식 $\dfrac{x+y}{1-xy}$는 탄젠트 덧셈정리(tangent addition formula)가 모양을 바꾼 것이다. $u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 대해 $x = \tan u$, $y = \tan v$로 놓으면 $u = \arctan x$, $v = \arctan y$이다. 그러면

$$z = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v).$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 $\mathrm{T}(u) = \mathrm{t}(\tan u)$로 정의한다. $u+v$도 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속할 때마다 항등식은

$$\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v) = \mathrm{t}(x) + \mathrm{t}(y) = \mathrm{t}(\tan(u+v)) = \mathrm{T}(u+v).$$

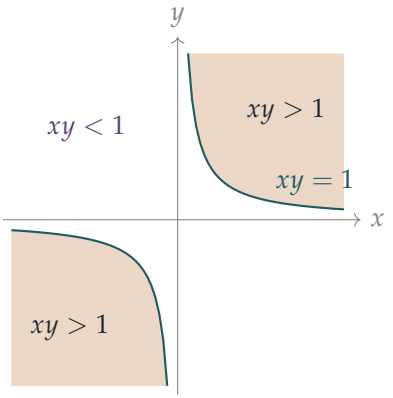
를 뜻한다.

생각해 보기 $(*)$에 대한 논증은 **모든** x와 y에 대해 성립하는 항등식을 이용했다. $u, v, u+v$가 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속할 때만 항등식을 알고 있어도 이 논증이 여전히 통할까?

그렇다. 매클로린 논증은 0 근처만 본다. $|u| < \frac{\pi}{4}$이면 $v = u$를 대입할 수 있고(이때 $|2u| < \frac{\pi}{2}$), 그러면 0 근처에서 $2\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(2u)$를 얻는다. $u = 0$에서 n번 미분하면 앞에서와 똑같이 $(2 - 2^n)\mathrm{T}^{(n)}(0) = 0$이므로 $\mathrm{T}(u) = ku$이다. $u = \arctan x$이므로

$$\mathrm{t}(x) = k \arctan x.$$

이것이 실제로 어떤 x와 y에 대해 성립할까? $xy < 1$이면 $u + v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이다. u와 v의 부호가 다르면 이는 저절로 성립한다. 둘 다 양수이면 $\tan u \tan v < 1$은 $\tan v < \cot u = \tan(\frac{\pi}{2} - u)$를 뜻하므로 $u + v < \frac{\pi}{2}$이고, 둘 다 음수인 경우는 대칭성에 의해 마찬가지이다. 따라서 $\arctan x + \arctan y = \arctan z$이고, 항등식이 성립한다. 그러나 $xy > 1$이면 $u+v$는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 밖에 있고, 이때 $\arctan z = u + v \mp \pi$이다. 예를 들어 $x = y = 2$이면 $z = -\frac{4}{3}$이고, $2\arctan 2 - \arctan(-\frac{4}{3}) = \pi$이다.



따라서 $\mathrm{t}(x) = k\arctan x$는 $xy < 1$인 모든 쌍, 즉 그림에서 원점을 포함하는 영역에서 항등식을 만족한다. 이것이 문제가 의도한 답이다. 색칠된 영역 $xy > 1$에서는 양변이 $\pm k\pi$만큼 차이 난다. $xy \neq 1$인 말 그대로 모든 쌍에 대해 항등식이 성립하기를 요구한다면 $k = 0$만 남고, 유일한 해는 $\mathrm{t} \equiv 0$이다.

검산

- 소문항 (iii)에서 항등식을 y에 대해 미분한 뒤 $y = 0$을 대입한다. $\partial z/\partial y = (1 + x^2)/(1 - xy)^2$이고 이는 $y = 0$에서 $1 + x^2$이므로 $\mathrm{t}'(0) = \mathrm{t}'(x)(1 + x^2)$를 얻는다. 따라서 $\mathrm{t}'(x) = k/(1 + x^2)$이고, $\mathrm{t}(0) = 0$과 함께 적분하면 $k\arctan x$가 된다. 같은 방법을 $(*)$에 쓰면 곧바로 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}'(0)$을 얻는다.
- 네 가지 답을 각각 10^4개의 무작위 쌍에 대해 수치적으로 확인하였다. 소문항 (iii)에서 $k\arctan x$는 $xy < 1$인 약 5×10^4개의 무작위 쌍 모두에서 항등식을 만족했고, $xy > 1$인 모든 쌍에서는 크기가 정확히 $k\pi$만큼 어긋났다.

흔한 실수

- 상수항을 잊는 것: $\mathrm{f}(0) = 0$은 $n = 0$인 경우에서 나오므로 답은 $kx + c$가 아니라 kx이다.
- $\mathrm{g} > 0$인지 확인하지 않고 $\ln \mathrm{g}$를 취하는 것. 영함수는 소문항 (i)의 엄연한 해이다.
- $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$가 항상 성립한다고 가정하는 것. 이 식은 $xy < 1$일 때만 성립한다.

STEP 너머

매클로린 급수를 가정하지 않아도 코시 방정식 $(*)$는 훨씬 적은 조건만으로 풀린다. f가 단지 연속(continuous)이기만 하면(또는 어떤 구간에서 유계(bounded)이기만 해도), 유리수(rational number) q에 대한 $\mathrm{f}(q) = q\,\mathrm{f}(1)$에서 출발하여 여전히 $\mathrm{f}(x) = kx$를 이끌어낼 수 있다. 하지만 선택 공리(axiom of choice)를 쓰면 선형이 아닌 기이한 해를 만들 수 있는데, 그 그래프는 평면에서 조밀(dense)하다. 소문항 (i)은 또한 지수함수가 덧셈에서 곱셈으로 가는 본질적으로 유일한 연속 준동형사상(homomorphism)임을 보여 주며, 이 생각은 군론(group theory) 전반에 걸쳐 다시 등장한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이런 종류의 연속성과 조밀성 논증이 꼼꼼하게 전개되는 것을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.