풀이

STEP III 2006, 문제 3

순수수학 • 멱급수의 계수

> **STEP III 2006, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q3

핵심 아이디어

$\tan x$를 거듭 미분할 필요는 전혀 없다. 삼각함수 항등식(trigonometric identity) 하나하나가 이 함수들 가운데 두 개를 연결하므로, 그 항등식은 곧 계수들 사이의 관계로 바뀐다. x^n의 계수를 비교(comparing coefficients)하고 나면 세 급수 모두가 하나의 수열 b_n으로 결정된다. 그러면 피타고라스 항등식(Pythagorean identity) $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$로부터 b_n이 만족해야 하는 방정식들을 얻고, 이를 하나씩 차례로 풀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

0 근방에서 어떤 함수로 수렴하는 멱급수(power series)는 그 함수의 매클로린 급수(Maclaurin series)이므로 $a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$이다. 그런데 tan는 기함수(odd function)이다: $\tan(-x) = -\tan x$. 기함수를 미분하면 우함수(even function)가 되고, 우함수를 미분하면 기함수가 된다. 따라서 tan의 짝수 차 도함수는 모두 기함수이고, 기함수는 0에서 값이 영이다. 그러므로 짝수 n에 대해 $\tan^{(n)}(0) = 0$이고, 따라서 짝수 n에 대해 $a_n = 0$이다. 다시 말해, 이 급수에는 x의 홀수 거듭제곱만 나타난다. 같은 논증을 역시 기함수인 $\cot x - \frac{1}{x} = \sum b_n x^n$에도 적용할 수 있으므로 짝수 n에 대해 $b_n = 0$이다. 이 사실은 아래의 관계식으로부터도 얻게 된다.

항등식을 보이기 위해 모두 $\sin x \cos x$를 분모로 하여 통분한다:

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

이제 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$로 잡자. 그러면 $2x$도 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하므로, x 대신 $2x$를 넣은 $\cot 2x$의 급수

를 쓸 수 있다:

$$2\cot 2x = 2\left(\frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} b_n x^n.$$

항등식의 좌변은 다음과 같다.

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) x^n.$$

$\frac{1}{x}$ 항은 소거된다. 남는 것은 $(0, \frac{1}{4}\pi)$의 모든 x에 대해 서로 같은 두 멱급수이다.

? **생각해 보기** 왜 두 무한급수의 계수를 비교해도 되는가?

두 멱급수가 어떤 구간 전체에서 같은 합을 가지면 그 계수들은 일치한다. 둘을 빼 보자. 그 차는 구간 전체에서 영인 멱급수이다. 그러면 그 구간에서 모든 도함수가 영이고, $x \to 0^+$로 보내면 모든 계수가 영임을 알 수 있다. 따라서

$$b_n - a_n = 2^{n+1} b_n, \qquad \text{즉,} \qquad a_n = (1 - 2^{n+1})\, b_n,$$

가 되어 요구된 결과가 성립한다. $1 - 2^{n+1} \neq 0$이므로 $b_n = a_n/(1 - 2^{n+1})$이고, 따라서 $a_n = 0$일 때, 즉 n이 짝수일 때마다 $b_n = 0$이다.

소문항 (ii)

같은 방법으로

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$에 대해, x 대신 $2x$를 넣은 cosec의 급수로부터 다음을 얻는다.

$$2\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} c_n x^n, \qquad \cot x + \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) x^n.$$

계수를 비교하면 $b_n + a_n = 2^{n+1} c_n$이다. 소문항 (i)에서 얻은 $a_n = (1 - 2^{n+1}) b_n$을 대입하면

$$2^{n+1} c_n = (2 - 2^{n+1})\, b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}\, b_n = (2^{-n} - 1)\, b_n,$$

이 되며, 이것이 요구된 결과이다. 특히 짝수 n에 대해 $c_n = 0$이기도 하다.

소문항 (iii)

$\cot x$와 $\operatorname{cosec} x$의 급수에 x를 곱하면

$$1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\cot x, \qquad 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\operatorname{cosec} x.$$

따라서 주어진 등식은 $x^2\cot^2 x + x^2 = x^2\operatorname{cosec}^2 x$라는 뜻이다. 이는 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$을 $\sin^2 x$로 나누어 얻는 항등식 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$에 x^2을 곱한 것이다. 이로써 증명이 끝난다.

이제 전개하자. 첨자가 짝수인 b_n과 c_n은 영이므로

$$x\cot x = 1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots, \qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots,$$

이고, 등식은 다음과 같이 된다.

$$(1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots)^2 + x^2 = (1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots)^2.$$

제곱하면

$$1 + (2b_1 + 1)x^2 + (2b_3 + b_1^2)x^4 + \cdots = 1 + 2c_1x^2 + (2c_3 + c_1^2)x^4 + \cdots.$$

소문항 (ii)로부터 $c_1 = (\frac{1}{2} - 1)b_1 = -\frac{1}{2}b_1$이고 $c_3 = (\frac{1}{8} - 1)b_3 = -\frac{7}{8}b_3$이다.

x^2**의 계수:**

$$2b_1 + 1 = 2c_1 = -b_1 \quad \Longrightarrow \quad b_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

그러면 소문항 (i)에서 $a_1 = (1 - 2^2)b_1 = (-3)(-\frac{1}{3}) = 1$을 얻으며, 이는 요구된 값이다.

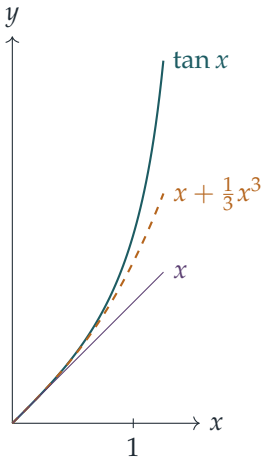
x^4**의 계수:** $b_1 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{1}{6}$을 대입하면

$$2b_3 + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{7}{4}b_3 + \tfrac{1}{36} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{15}{4}\,b_3 = -\tfrac{3}{36} = -\tfrac{1}{12} \quad \Longrightarrow \quad b_3 = -\tfrac{1}{45}.$$

따라서

$$a_3 = (1 - 2^4)\,b_3 = (-15)\left(-\tfrac{1}{45}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

그러므로 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$이다.



검산

- $x = 0.3$일 때 $\tan 0.3 \approx 0.309336$이고 $0.3 + \frac{1}{3}(0.3)^3 = 0.309$이다. 차이는 약 3×10^{-4}로, 다음 항 $\frac{2}{15}x^5$의 크기와 같다.
- $b_1 = -\frac{1}{3}$이라는 값은 익숙한 근사 $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$과 일치한다. 또 $c_1 = \frac{1}{6}$은 $\operatorname{cosec} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$과 일치하는데, 이는 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$으로부터 얻을 수 있다.
- sin과 cos의 급수를 나누어, 48 이하의 모든 n에 대해 세 관계식을 (유리수 연산으로) 정확히 확인하였다. 또한 $(0, 1)$의 임의의 점들에서 부분합(partial sum)이 tan, cot, cosec의 값과 일치함도 확인하였다.

흔한 실수

- $\frac{1}{x}$ 항을 잊은 채 계수를 비교하는 것. 이 항들은 소거되지만, 그것은 오직 $2\cot 2x$와 $2\operatorname{cosec} 2x$에 있는 인수 2 덕분이다.
- 소문항 (iii)에서 제곱을 전개할 때 $b_0 = b_2 = 0$임을 잊는 것. b_0을 남겨 두면 x의 홀수 거듭제곱이 쓸데없이 생기고, 그 계수들이 영임을 따로 보여야 한다.
- $c_3 = -\frac{7}{8}b_3$에서 부호나 2의 거듭제곱을 틀리는 것. $2^{-3} - 1 = -\frac{7}{8}$임에 유의하라.

STEP 너머

이 방법을 더 높은 차수까지 밀고 나가면 계수들이 베르누이 수(Bernoulli numbers) B_{2k}임이 드러난다: $x\cot x = \sum_k (-1)^k 2^{2k} B_{2k}\, x^{2k}/(2k)!$. 그러면 소문항 (i)의 인수 $1 - 2^{n+1}$로부터 $\tan x$의 계수에 대한 일반 공식을 얻는다. $\tan x$의 급수는 왜 $|x| = \frac{1}{2}\pi$에서 수렴하지 않게 되는가? 복소해석학(complex analysis)이 이에 답한다: 멱급수는 함수가 발산하는 가장 가까운 점까지 수렴하며, tan의 경우 그 점은 $\pm\frac{1}{2}\pi$에 있는 극(pole)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이를 아름답게 설명하고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 멱급수의 항별 비교를 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.