풀이

STEP III 2006, 문제 2

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

STEP III 2006, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q2

핵심 아이디어

구간 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$는 대칭(symmetric)이므로 θ를 $-\theta$로 바꾸면 I에 대한 또 하나의 식을 얻는다. 두 식을 더하면 분모에 있는 성가신 $\sin\theta$가 사라진다. 모든 것을 $\tan\theta$로 나타내고 나면 적분 I와 J의 분모가 같아지고, 둘을 잘 골라 결합하면 피적분함수(integrand)가 정확히 1이 된다. 풀이 내내 $\cos 2\alpha$의 부호에 주의하자. 마지막 소문항에서 달라지는 것이 바로 이것이다.

풀이

$s = \sin 2\alpha$, $c = \cos 2\alpha$로 놓으면 $s^2 + c^2 = 1$이다. 여기서 다루는 α의 두 범위($\alpha \neq \frac{1}{4}\pi$) 모두에서 $0 < s < 1$이므로 $1 \mp s\sin\theta \geq 1 - s > 0$이다. 따라서 I의 피적분함수는 구간 전체에서 연속(continuous)이다.

소문항 (i)

$\theta = -\phi$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$이고 적분 구간의 위끝과 아래끝이 서로 바뀐다. $\cos^2(-\phi) = \cos^2\phi$이고 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$이므로

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + \sin\phi\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

이고, 이것이 (ϕ를 다시 θ로 쓰면) 첫 번째 결과이다.

I에 대한 두 식을 더하면

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

이제 분자와 분모를 $\cos^2\theta$(구간 내부에서 0이 아니다)로 나누면

$$\frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta} = \frac{2}{\sec^2\theta - s^2\tan^2\theta} = \frac{2}{1+\tan^2\theta\,(1-s^2)} = \frac{2}{1+c^2\tan^2\theta},$$

이다. 여기서 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$와 $1-\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$를 이용하였다. 따라서

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta\cos^2 2\alpha}\,\mathrm{d}\theta,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. ($\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 이 피적분함수는 0으로 수렴하므로 양 끝에서 문제가 생기지 않는다.)

소문항 (ii)

분자의 $\sec^2\theta$를 보면 $t = \tan\theta$, $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$로 치환하고 싶어진다. θ가 $-\frac{1}{2}\pi$부터 $\frac{1}{2}\pi$까지 움직일 때 t는 실수 전체를 움직인다.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2}.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$이므로 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$이고, 따라서 $c > 0$이다. $u = ct$로 놓으면

$$J = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{c}\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{c} = \pi\sec 2\alpha.$$

소문항 (iii)

소문항 (i)에 의해 $I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c^2\tan^2\theta}$이고, 이는 J와 분모가 같다. 그러므로

$$s^2I + c^2J = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{s^2+c^2\sec^2\theta}{1+c^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

? 생각해 보기 왜 하필 이 결합이 더 쉬워야 할까?

분자를 살펴보자. $s^2 + c^2\sec^2\theta = s^2 + c^2 + c^2\tan^2\theta = 1 + c^2\tan^2\theta$이다. 이는 분모와 정확히 같으므로 피적분함수는 1이고

$$s^2I + c^2J = \pi.$$

소문항 (ii)의 $J = \pi/c$를 이용하면

$$s^2I = \pi - \pi c = \pi(1-c) \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c},$$

이다. 여기서 $s^2 = 1-c^2 = (1-c)(1+c)$를 이용하였고, ($c < 1$이므로) $1-c \neq 0$으로 약분하였다. 마지막으로 $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$이므로

$$I = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha. \qquad \checkmark$$

소문항 (iv)

이번에는 $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi < 2\alpha < \pi$이다. 여전히 $0 < s < 1$이지만 이제 $c < 0$이다. 소문항 (i)은 $s^2 + c^2 = 1$만을 사용했으므로 그대로 성립하고, 소문항 (iii)의 항등식 $s^2 I + c^2 J = \pi$도 마찬가지이다. 달라지는 것은 소문항 (ii) 하나뿐이다.

? **생각해 보기** 소문항 (ii)는 정확히 어디에서 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$를 사용했는가?

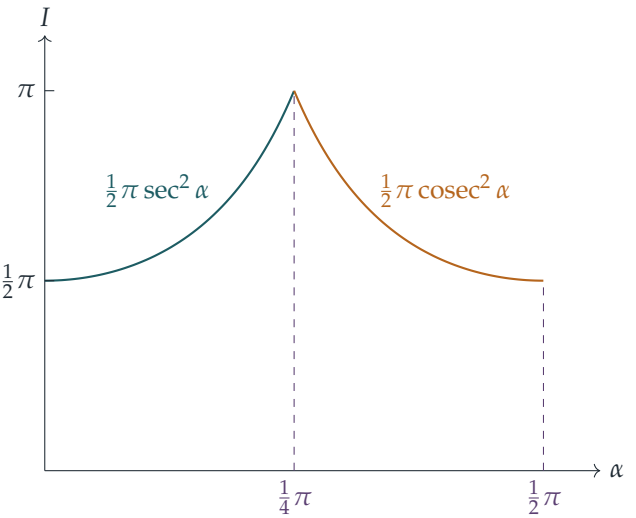
치환 $u = ct$에서이다. $c < 0$이면 u의 적분 구간이 $+\infty$부터 $-\infty$까지가 되고, 이를 다시 바꾸면 음의 부호가 붙는다. 즉 $J = \pi/|c| = -\pi/c$이다. (당연히 그래야 한다. J는 양수인 함수의 적분이므로 음수 $\pi \sec 2\alpha$와 같을 수 없다.) 그러면

$$s^2 I = \pi - c^2\Big(-\frac{\pi}{c}\Big) = \pi(1+c) \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi(1+c)}{(1-c)(1+c)} = \frac{\pi}{1-c},$$

이고, 여기서 ($c > -1$이므로) $1 + c \neq 0$으로 약분하였다. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$이므로

$$I = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad \big(\tfrac{1}{4}\pi < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi\big).$$

빠르게 확인하는 방법이 있다. I는 $\sin 2\alpha$를 통해서만 α에 의존하고, $\sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$이다. 따라서 $I(\alpha) = I(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \sec^2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha$이다. I의 그래프는 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$에 대하여 대칭이고, 이 점에서 두 공식은 모두 π를 준다.



검산

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi (c = 0)$에서 소문항 (i)의 2I 꼴의 피적분함수는 2이므로 $I = \pi$이고, 이는 두 공식과 모두 일치한다.

- $\alpha \to 0$일 때 $I \to \int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi$이고, 이는 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$과 일치한다.
- 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하여 수치적으로 계산하면, $\alpha = 0.5$일 때 $I \approx 2.039595$로 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0.5$와 같고, $\alpha = 1.1$일 때 $I \approx 1.977709 = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2 1.1$이다. 시험해 본 모든 경우에서 $s^2 I + c^2 J$의 값은 3.141593이었다.

흔한 실수

- 소문항 (iv)에서도 $J = \pi \sec 2\alpha$로 쓰는 것. 그 범위에서 이 값은 음수인데, 양수인 함수의 적분이 음수일 수는 없다.
- 치환 $t = \tan\theta$가 유한 구간을 실수 전체로 바꾸어 적분 구간이 $\pm\infty$가 된다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

소문항 (i)의 기법, 즉 $f(\theta)$와 $f(-\theta)$의 평균을 취하는 것은 함수를 우함수(even function) 부분과 기함수(odd function) 부분으로 나누는 일의 출발점이다. 대칭인 구간에서 적분하면 우함수 부분만 남는다. $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 유리함수를 한 주기 전체에 걸쳐 적분하는 것은 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 다루는 복소 경로 적분(contour integration), 즉 유수 정리(residue theorem)의 고전적인 응용이며, 그곳에서는 이와 같은 결과가 몇 줄 만에 나온다. Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.