풀이

STEP III 2006, 문제 11

역학 • 연결된 계에서의 충돌

> **STEP III 2006, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q11

핵심 아이디어

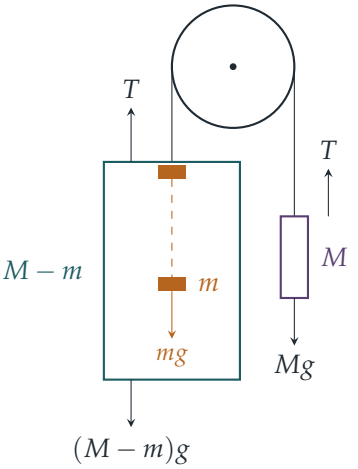
타일이 떨어져 나가는 순간 승강기(lift)는 균형추(counterweight)보다 가벼워지므로, 타일이 떨어지는 동안 승강기는 올라가기 시작한다. 따라서 타일은 **승강기에 대한 상대적인** 높이 h를 지나야 한다. 충돌할 때 승강기와 균형추는 질량 $2M - m$인 하나의 물체처럼 움직이며 바닥을 통해 타일과 연결되어 있다. 줄의 충격량(impulse)에 대해 주어진 조건이 바로 이 물체와 타일에 대해 운동량(momentum) 형태의 보존 법칙을 쓸 수 있게 해 준다. 이 "운동량"은 충돌 직전에 0이 되고, 그 덕분에 에너지 계산이 매우 깔끔해진다.

풀이

승강기, 균형추, 타일을 (연직 운동에 대한) 입자로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 도르래(pulley)는 매끄러운 것으로 모형화한다. 타일이 떨어지기 전에는 계가 정지해 있으므로, 타일을 **포함한** 승강기가 균형추와 평형을 이룬다. 즉 승강기의 질량은 타일을 포함하면 M이고, 타일이 없으면 $M - m$이다.

낙하

승강기와 타일에 대해서는 위쪽을 양의 방향으로 잡는다. 줄이 늘어나지 않으므로 승강기가 속력 u, 가속도 a로 올라갈 때 균형추는 같은 속력과 가속도로 내려간다. 장력(tension)을 T라 하자.



승강기(위쪽)와 균형추(아래쪽)에 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$(M-m)a = T-(M-m)g, \qquad Ma = Mg - T.$$

두 식을 더하면 $(2M-m)a = mg$이므로

$$a = \frac{mg}{2M-m}.$$

타일은 아래쪽으로 가속도 g인 자유낙하(free fall)를 한다(안내 레일은 매끄럽고 다른 어떤 것도 타일에 닿지 않는다). 따라서 승강기에 대한 타일의 상대 가속도는 아래쪽으로

$$g + a = g + \frac{mg}{2M-m} = \frac{2Mg}{2M-m},$$

이고, 승강기에 대해 정지한 상태에서 출발한다. 시간 t가 지난 뒤 $\frac{1}{2}(g+a)t^2 = h$일 때 바닥에 닿으므로

$$t^2 = \frac{(2M-m)h}{Mg}.$$

그 순간 타일의 속력은

$$v = gt = \sqrt{g^2 \cdot \frac{(2M-m)h}{Mg}} = \sqrt{\frac{(2M-m)gh}{M}},$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다. 이때 승강기(와 균형추)의 속력은

$$U = at = \frac{m}{2M-m}\,gt = \frac{mv}{2M-m}.$$

이 시간 동안 승강기는 $\frac{1}{2}at^2 = \frac{mh}{2M} < h$만큼 올라가므로, 도르래까지의 거리에 대한 조건에 의해 승강기가 그보다 먼저 도르래에 닿지 않음이 보장된다.

충돌

바닥이 타일에 주는 충격량을 J(위쪽)라 하고, 줄의 장력에 의한 충격량을 I라 하자. 주어진 조건에 의해 I는 승강기와 균형추에 같은 크기로 작용한다(각각에 위쪽으로 작용한다). 순간적인 충돌 동안 중력은 충격량을 주지 않는다. 충돌 직후 타일의 속도를 w(위쪽), 승강기의 속도를 U'(위쪽)라 하면, 균형추의 아래쪽 속도도 U'이다. 그러면

$$\begin{aligned} \text{타일:} \quad & m\big(w-(-v)\big) = J, \\ \text{승강기:} \quad & (M-m)(U'-U) = I-J, \\ \text{균형추 (아래쪽):} \quad & M(U'-U) = -I. \end{aligned}$$

세 식을 모두 더하면 J와 I가 소거된다.

$$mw + (2M-m)U' = -mv + (2M-m)U.$$

> **생각해 보기** "아래쪽"을 양의 방향으로 쓴 균형추의 식을 나머지 식들과 더해도 되는 이유는 무엇인가?

줄 때문에 "균형추가 아래로"와 "승강기가 위로"는 같은 좌표이다. 우리가 보인 것은 조합 $mw + (2M-m)U'$(타일의 위쪽 운동량에 줄을 따라 잰 승강기와 균형추의 운동량을 더한 것)이 충돌에 의해 변하지 않는다는 사실이다. 바로 여기서 충격량이 같다는 조건이 쓰인다. 이 조건이 없으면 I가 소거되지 않는다.

이제 핵심 관찰이다. $U = \dfrac{mv}{2M-m}$이므로 우변은 $-mv + mv = 0$이다. 따라서

$$mw + (2M-m)U' = 0 = -mv + (2M-m)U.$$

바닥에서의 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 따르면 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다.

$$w - U' = e\big(U-(-v)\big) = e(U+v).$$

충돌 전과 후의 속도가 모두 같은 "영운동량" 방정식을 만족하므로, 두 쌍 (w, U')와 $(-v, U)$는 각각 $(2M-m,\ -m)$의 상수배이다. 그러면 반발 방정식이 그 배수를 결정한다. 즉 $w = ev$이고 $U' = -eU$이다. (확인: $mev - (2M-m)eU = e(mv - mv) = 0$이고 $w - U' = e(v+U)$이다.)

에너지 손실

충돌 직전의 운동에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2M-m)U^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{m}{2M-m}\right) = \frac{Mmv^2}{2M-m} = mgh,$$

이다. 여기서 $U = \frac{mv}{2M-m}$을, 이어서 $v^2 = \frac{(2M-m)gh}{M}$을 이용하였다. 충돌 직후에는 모든 속도에 $\pm e$가 곱해졌으므로 운동에너지는 $e^2\, mgh$이다. 충돌은 순간적이므로 그동안 위치에너지(potential energy)는 변하지 않고, 계의 에너지 손실은

$$mgh - e^2 mgh = mgh(1 - e^2),$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

덧붙임

답은 M에 전혀 의존하지 않는다. 이것은 타일이 **고정된** 승강기 안에서 높이 h만큼 떨어져 반발계수(coefficient of restitution) e로 튀어 오를 때의 손실과 정확히 같다. 이는 이치에 맞는다. 충돌 직전 계의 운동에너지는 mgh인데, 이는 방출된 위치에너지와 같다(타일과 승강기가 간격 h를 좁히고, 승강기가 올라간 만큼 균형추가 정확히 내려가 상쇄된다). 또 줄을 따른 "운동량"이 0이므로, 이 충돌은 영운동량 좌표계(zero-momentum frame)에서 본 충돌처럼 행동하며, 그런 좌표계에서는 항상 운동에너지의 $1 - e^2$ 비율만큼이 손실된다. 특히 $e = 0$이면 운동에너지가 모두 손실되어 계 전체가 정지하고, $e = 1$이면 아무것도 손실되지 않는다.

검산

- $M = 5, m = 2, h = 3, g = 10, e = \frac{1}{3}$으로 잡자. 그러면 $v^2 = 48$, $U^2 = 3$이므로 충돌 전 운동에너지는 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 48 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 60 = mgh$이고, 손실은 $60 \cdot \frac{8}{9} = \frac{160}{3}$이다.
- M, m, h, e를 무작위로 200가지 골라 운동을 수치적으로 단계별 계산하면(타일은 자유낙하, 승강기는 $\frac{mg}{2M-m}$로 위쪽 가속), 충돌 속력 v, 승강기 속력 U, 손실 $mgh(1-e^2)$가 그대로 재현된다.
- $m \to 0$이면 승강기는 거의 움직이지 않고 $v \to \sqrt{2gh}$, 즉 자유낙하 속력이 되며, 마땅히 그래야 한다.
- 장력에 의한 충격량 $I = M(U - U') = M(1+e)U$는 양수이므로 충돌하는 동안 줄은 팽팽하게 유지된다.

흔한 실수

- 타일이 떨어진 뒤에도 승강기의 질량을 M으로 놓는 것. 그러면 아무것도 가속되지 않아 타일의 속력이 $\sqrt{2gh}$가 되어 버린다.
- 바닥이 타일을 향해 올라온다는 사실을 잊어, 타일이 지면에 대해 h보다 적게 떨어진다는 점을 놓치는 것.

- 줄을 통해 승강기와 연결된 균형추를 잊고, 타일과 승강기만으로 운동량 보존을 적용하는 것.

STEP 너머

충돌에서 보존되는 양은 보통의 운동량이 아니라, 줄의 위치를 나타내는 단 하나의 좌표에 켤레인 운동량이다. 이것은 일반화 좌표(generalised coordinates)와 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 첫 맛보기이다. 전체 운동량이 0인 충돌에서 운동에너지의 정확히 $1 - e^2$ 비율이 손실된다는 사실은 충돌 이론 전반을 관통하는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)의 아이디어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표계에서의 운동량과 연결된 물체들의 계를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.