풀이

STEP III 2006, 문제 10

역학 • 각운동량 보존

STEP III 2006, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q10

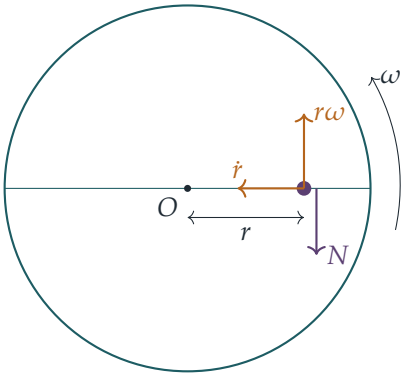
핵심 아이디어

원판과 입자로 이루어진 계에는 축을 중심으로 계를 돌리는 외부 작용이 전혀 없고, 매끄러운 홈은 알짜 일을 하지 않으므로 두 가지 보존 법칙(conservation law)이 성립한다. 바로 축에 대한 각운동량(angular momentum)과 운동에너지(kinetic energy)의 보존이다. 이 두 법칙으로 ω와 $\dot{r}$를 r만의 함수로 나타낼 수 있으며, V, Ω, a, k를 잇는 낯선 조건은 에너지 식이 간단하게 정리되도록 하기 위해 주어진 것이다. $\dot{r}$를 $\dot{\theta} = \omega$로 나누면 시간이 소거되고, 경로에 대한 변수분리형(separable) 방정식이 남는다.

풀이

모형

입자를 질량 m인 질점(point mass)으로, 홈을 매끄러운 것으로 다룬다. 따라서 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 홈에 수직인 항력(reaction) N뿐이다. 원판은 고정된 연직축을 중심으로 자유롭게 회전하므로, 베어링은 그 축에 대해 토크(torque)를 작용하지 않는다. 중력과 연직 방향의 항력은 연직 방향이므로 아무 역할도 하지 않는다. 원판이 회전한 각을 θ라 하면 $\omega = \dot{\theta}$이고, 입자와 축 사이의 거리를 r라 하자. 입자는 홈 안에 머물러 있으므로, 입자의 속도는 홈 방향의 성분 $\dot{r}$와 홈에 수직인 성분 $r\omega$를 갖는다.



각속도

항력 N은 입자에, $-N$은 같은 점에서 원판에 작용하므로, 축에 대한 두 힘의 모멘트는 서로 상쇄된다. 축에 대한 외부 토크가 없으므로 축에 대한 전체 각운동량은 일정하다. 원판의 각운동량은 $mk^2\omega$이고, 입자의 각운동량은 $mr \cdot r\omega = mr^2\omega$이다(속도의 가로 방향 성분만이 모멘트를 가진다). $t = 0$일 때 전체 각운동량은 $m(k^2 + a^2)\Omega$이므로

$$(k^2 + r^2)\,\omega = (k^2 + a^2)\,\Omega, \qquad \text{즉,} \qquad \omega = \frac{\Omega(k^2 + a^2)}{k^2 + r^2},$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

지름 방향 속력

생각해 보기 입자가 움직이는 동안 홈은 입자를 옆으로 민다. 그런데 왜 에너지가 보존되는가?

항력 N은 홈에 수직이다. 입자와, 원판에서 입자와 맞닿은 점은 홈에 수직인 속도 성분이 $r\omega$로 같다. 둘의 속도는 홈 방향의 미끄러짐 속도 $\dot{r}$만큼만 다르며, 이 속도는 N에 수직이다. 따라서 N이 입자에 하는 일은 $-N$이 원판에 하는 일과 정확히 상쇄된다. 축의 베어링은 일을 하지 않으므로 전체 운동에너지는 일정하다.

공통인수 $\frac{1}{2}m$을 약분하면, 에너지 보존에 의해

$$k^2\omega^2 + \dot{r}^2 + r^2\omega^2 = k^2\Omega^2 + V^2 + a^2\Omega^2.$$

이제 우변에 주어진 조건 $V^2 = \Omega^2 a^2(k^2 + a^2)/k^2$을 대입하면

$$(k^2 + a^2)\Omega^2 + \frac{\Omega^2 a^2(k^2 + a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2 + a^2)(k^2 + a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2 + a^2)^2}{k^2}.$$

좌변에서는 첫 번째 결과에 의해 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+r^2}\right)\\ &= \frac{\Omega^2 r^2(k^2+a^2)^2}{k^2(k^2+r^2)},\end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

경로의 방정식

입자가 축을 향해 움직이는 동안 $\dot{r}<0$이므로, 음의 제곱근을 택하면

$$\dot{r} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}.$$

$\omega = \dot{\theta} > 0$이므로 연쇄법칙(chain rule) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\Big/\dot{\theta} = \dot{r}/\omega$를 쓸 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k},$$

따라서 $k\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r(k^2+r^2)^{1/2}$이 되어 요구한 결과를 얻는다.

r 구하기

$u = k/r$로 놓으면 $u>0$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k} = \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+1} = \sqrt{1+u^2}.$$

이 식은 변수분리가 된다.

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{arsinh}u = \theta+\alpha$$

여기서 α는 상수이다. 따라서 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$, 즉

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k.$$

$t=0$일 때 $\theta=0$이고 $r=a$이므로 $\sinh\alpha = k/a$가 되어 요구한 결과를 얻는다.

입자는 결코 축에 도달하지 않는다

생각해 보기 $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$는 결코 0이 되지 않는다. 그런데 θ가 유한한 시간 안에 무한대가 될 수는 없을까?

그럴 수 없다. $r^2 \geq 0$이므로 첫 번째 결과에 의해 $\omega \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$이고, 따라서 모든 유한한 시각 t에서 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$는 유한하다. 그러므로 모든 시각에서 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$이다.

공식들이 계속 유효한지, 즉 입자가 계속 축을 향해 움직이는지도 확인해야 한다. $\dot{r}^2$에 대한 공식에 의해 $\dot{r}$는 $r = 0$일 때만 0이 될 수 있다. 따라서 $r > 0$인 동안 $\dot{r}$는 처음의 음의 부호를 유지하고, 위의 논증은 모든 $t > 0$에 대해 성립한다. 입자는 나선을 그리며 축에 점점 더 가까워지고, $r \to 0$은 $\theta \to \infty$일 때만 일어나므로 입자는 결코 축에 도달하지 않는다.

검산

- $r = a$일 때 $\dot{r}^2$에 대한 공식은 $\Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2 = V^2$을 주며, 이는 초기 조건과 일치한다.
- $k = a = \Omega = 1$(따라서 $V = \sqrt{2}$)로 두고 운동 방정식 $\ddot{r} = r\omega^2$와 $(k^2+r^2)\omega =$ 상수를 수치적으로 적분하였다. 원판이 $\theta \approx 4.4170$만큼 회전했을 때 입자는 $r = 0.01$에 도달했으며, 이는 $\operatorname{arsinh} 100 - \operatorname{arsinh} 1 \approx 5.2983 - 0.8814 = 4.4169$와 일치한다. 계산하는 동안 에너지, $\dot{r}^2$, $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ 모두 약 10^{-11}의 오차 범위 안에서 유지되었다.

흔한 실수

- 입자 자신의 각운동량 $mr^2\omega$나 가로 방향 운동에너지 $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$를 빠뜨리는 것.
- $\dot{r}$에 대해 양의 제곱근을 택하여 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 부호를 잘못 구하는 것.
- θ가 유한한 시각에서 유한하게 유지된다는 점을 언급하지 않고 $r \neq 0$만으로 "결코 축에 도달하지 않는다"고 결론 내리는 것.

STEP 너머

입자는 지름 방향의 힘을 전혀 받지 않지만, 원판의 회전 좌표계(rotating frame)에서는 바깥쪽으로 밀려나는 것처럼 보인다. 이것이 $\ddot{r} = r\omega^2$의 원심력(centrifugal) 항이며, 옆으로 작용하는 항력 N은 코리올리 힘(Coriolis force)과 균형을 이룬다. 대학 역학에서는 이런 문제를 라그랑주 방법(Lagrangian methods)으로 다룬다. 각 θ가 에너지에 나타나지 않으므로, 그 켤레 운동량(conjugate momentum), 여기서는 각운동량이 자동으로 보존된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 회전 좌표계와 각운동량을 적절한 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.