풀이

STEP III 2006, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP III 2006, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q1

핵심 아이디어

먼저 나눗셈을 한다. 곡선을 직선과 작은 보정항의 합으로 쓰면 비스듬한 점근선(oblique asymptote)을 얻을 수 있고, 곡선이 점근선의 어느 쪽에 놓이는지 알 수 있으며, 도함수(derivative)도 쉽게 구할 수 있다. 도함수는 모든 곳에서 2보다 크다는 것이 밝혀지는데, 이 한 가지 사실이 근의 개수를 세는 문항들에서 대부분의 일을 해 준다. 각 방정식은 "곡선 = 간단한 무언가"의 꼴로 정리되고, 우리는 기울기를 비교한다.

풀이

곡선

$2x^3 - 10x = 2x(x^2 - 4) - 2x$이므로

$$y = \frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

여기서 곧바로 읽어 낼 수 있는 특징들이 있다.

- y는 **기함수**(*odd function*)이므로, 곡선은 원점에 대하여 2차 회전대칭을 가진다.
- 곡선은 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{5}$에서 x축과 만난다.
- **점근선.** 분모는 $x = \pm 2$에서 0이 되고(이때 분자는 $\pm 4 \cdot (-1) \cdot 2 \neq 0$이다), 따라서 $x = 2$와 $x = -2$는 수직점근선(vertical asymptote)이다. $|x| \to \infty$일 때 보정항 $2x/(x^2-4) \to 0$이므로, $y = 2x$는 비스듬한 점근선이다.
- **점근선의 어느 쪽인가.** $y - 2x = -2x/(x^2-4)$이다. $x > 2$이면 이 값은 음수이고(곡선은 $y = 2x$의 바로 아래에 있다), $x < -2$이면 양수이다(바로 위에 있다). $0 < x < 2$이면

양수이고, $-2 < x < 0$이면 음수이다.

- $x = \pm 2$ **근처에서의 거동.** $x \to 2^+$일 때 $-2x/(x^2-4) \to -\infty$이고, $x \to 2^-$일 때는 $+\infty$로 간다. 기함수라는 성질에 의해 $x \to -2^-$일 때 $y \to +\infty$이고, $x \to -2^+$일 때 $y \to -\infty$이다.

나눗셈한 꼴을 미분하면

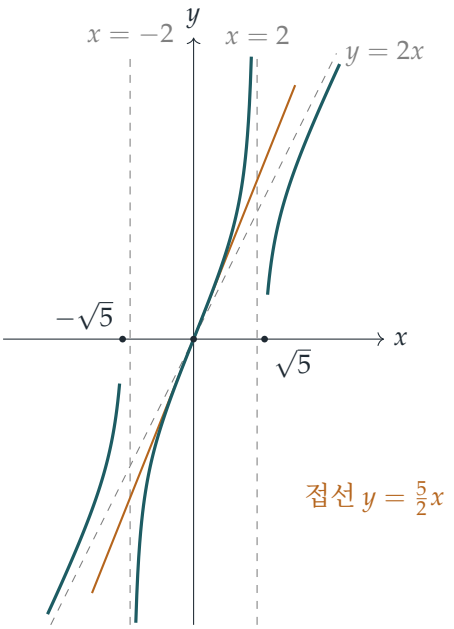
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

따라서 $x \neq \pm 2$인 모든 x에 대하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 2$이다. 즉 정류점(stationary point)은 없으며, 세 구간 $x < -2$, $-2 < x < 2$, $x > 2$ 각각에서 곡선은 순증가하여 $-\infty$에서 $+\infty$까지 올라간다.

원점에서의 접선. $x = 0$에서 기울기는 $2 + 8/16 = \frac{5}{2}$이므로 접선은 $y = \frac{5}{2}x$이다. 한 번 더 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

이고, 이는 $x = 0$에서만 0이 되며 그곳에서 부호가 바뀐다. 즉 원점은 변곡점(point of inflection)이다. $0 < x < 2$에서는 이계도함수가 양수이므로(분자와 분모가 모두 음수) 가운데 가지는 그 구간에서 아래로 볼록(convex)하여 접선 $y = \frac{5}{2}x$의 **위쪽**에 놓인다. $-2 < x < 0$에서는 위로 볼록(concave)하여 접선의 아래쪽에 놓인다.



요약. 점근선은 $x = 2$, $x = -2$, $y = 2x$이고, 원점에서의 접선은 $y = \frac{5}{2}x$이다.

아래의 각 소문항에서 $x = \pm 2$는 결코 근이 아니다(그곳에서 좌변은 0이 아니지만 우변은 0이다). 따라서 $x^2 - 4$로 나누어, 곡선과 다른 그래프의 교점 개수를 세면 된다.

소문항 (i)

$\frac{3}{2}(x^2 - 4)$로 나누면 방정식은

$$\frac{2x(x^2 - 5)}{x^2 - 4} = \frac{2}{3}(x + 3),$$

이 되므로, 곡선과 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선 $y = \frac{2}{3}x + 2$의 교점을 구하면 된다.

? 생각해 보기 기울기가 2보다 작은 직선은 왜 각 가지와 정확히 한 번씩 만나는가?

$h(x)$를 곡선의 y값에서 직선의 y값을 뺀 것이라 하자. 각 가지에서 $h'(x) > 2 - \frac{2}{3} > 0$이므로 h는 순증가하고, 영점은 많아야 하나이다. 수직점근선 쪽 끝에서는 y와 마찬가지로 $h \to \pm\infty$이다(직선은 유한한 값에 머문다). 바깥쪽 끝에서는 $h \approx 2x - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x$이고, 이는 $x \to -\infty$일 때 $-\infty$로, $x \to +\infty$일 때 $+\infty$로 간다. 따라서 세 가지 각각에서 h는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 움직이며, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 정확히 한 번 0이 된다.

그러므로 방정식 (i)은 **세 개**의 실근을 가진다. (실제로 이 방정식은 삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 - 11x + 12 = 0$이며, $x = 1$이 근 중 하나이다.)

소문항 (ii)

$2(x^2 - 4)$로 나누면, 원점에서의 접선을 1만큼 아래로 옮긴 직선 $y = \frac{5}{2}x - 1$과의 교점을 구해야 한다. 이번에는 기울기가 2보다 크므로 (i)의 논증을 더 이상 쓸 수 없고, 가지별로 살펴본다.

- $x > 2$: 곡선은 $y = 2x$의 아래에 있고, 직선은 $\frac{5}{2}x - 1 - 2x = \frac{1}{2}x - 1 > 0$을 만족하므로 $y = 2x$의 위에 있다. 교점은 없다.
- $x < -2$: 곡선은 $y = 2x$의 위에 있고, 직선은 $\frac{1}{2}x - 1 < 0$이므로 그 아래에 있다. 교점은 없다.
- $0 \le x < 2$: 곡선은 (볼록성에 의해) 접선 $y = \frac{5}{2}x$ 위에 있거나 그보다 위에 있고, 접선은 직선보다 위에 있다. 교점은 없다.
- $-2 < x < 0$: $x \to -2^+$일 때 곡선은 $-\infty$로 가고 직선은 -6으로 간다. $x = 0$에서 곡선의 값은 0으로 직선의 값 -1보다 위에 있다. 따라서 적어도 한 번은 만난다. 이 구간에서 $y'' < 0$이므로 y'은 $(-2, 0)$에서 감소하고, 따라서 $y' > y'(0) = \frac{5}{2}$이다. 그러므로 "곡선 빼기 직선"은 순증가하고, 교점은 유일하다.

그러므로 방정식 (ii)는 -2와 0 사이에 놓인 **한 개**의 실근을 정확히 가진다. (삼차방정식으로 쓰면 $x^3 - 2x^2 + 8 = 0$이며, 극값 8과 $\frac{184}{27}$가 모두 양수이므로 $x \approx -1.51$ 근처에 실근이 하나뿐임이 확인된다.)

소문항 (iii)

$(x^2-4)^2$으로 나누면

$$\left(\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4}\right)^2 = x^2 + 1,$$

이므로, 곡선과 직각쌍곡선(rectangular hyperbola) $y^2 - x^2 = 1$의 교점, 즉 $y = \sqrt{x^2+1}$(위쪽 가지) 또는 $y = -\sqrt{x^2+1}$(아래쪽 가지)과의 교점을 구해야 한다.

> **생각해 보기** 대칭성을 이용해 일을 반으로 줄일 수 있을까?

그렇다. 사상 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$는 곡선을 자기 자신으로 보내고(곡선은 기함수의 그래프이다), 쌍곡선의 두 가지를 서로 맞바꾼다. 따라서 아래쪽 가지와의 교점은 위쪽 가지와의 교점과 일대일로 대응하며, 위쪽 가지와의 교점만 세면 된다.

$u(x) = \sqrt{x^2+1}$이라 하자. 그러면 $|u'(x)| = |x|/\sqrt{x^2+1} < 1$이므로, 곡선의 각 가지에서 차 $y - u$의 도함수는 $2 - 1 = 1 > 0$보다 크고, 각 가지는 많아야 하나의 교점을 준다. 이제 양 끝을 확인한다.

- $-2 < x < 2$: $y - u$는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 움직인다. 근이 하나이다.
- $x > 2$: $x \to 2^+$일 때 $y - u \to -\infty$이고, $x \to \infty$일 때 $y - u \approx 2x - x \to +\infty$이다. 근이 하나이다.
- $x < -2$: $x \to -\infty$일 때 $y - u \approx 2x - |x| = 3x \to -\infty$이고, $x \to -2^-$일 때 $y - u \to +\infty$이다. 근이 하나이다.

따라서 곡선은 위쪽 가지와 세 번 만나고, 대칭성에 의해 아래쪽 가지와도 세 번 만난다. 두 가지는 공통점이 없으므로($u \geq 1$), 이 여섯 점의 x좌표는 서로 다른 여섯 개이며, 방정식 (iii)은 **여섯 개**의 실근을 가진다. 이 방정식은 6차 다항방정식(구체적으로 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$)이므로, 그 근은 모두 실근이다.

검산

- $x = 0$ 근처에서 $y \approx 2x(-5)/(-4) = \frac{5}{2}x$이며, 접선과 일치한다.
- $x = 1000$에서 $y - 2x \approx -0.002$로, 예측대로 작은 음수이다.
- 원래 방정식에 대해 부호 변화를 이용한 수치 탐색을 하면 (i)에서는 근

$x \approx -2.212,\ 1,\ 2.713$을, (ii)에서는 $x \approx -1.510$ 하나만을, (iii)에서는 $x \approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$를 얻는다.

흔한 실수

- $x^2 - 4$로 나누기 전에 $x = \pm 2$가 근이 아님을 확인하는 것을 잊는다.
- (iii)에서 $y = \sqrt{x^2 + 1}$과의 교점만 세고 음의 제곱근을 빠뜨린다.
- (ii)에서 (i)처럼 "가파른 직선이니 가지마다 근이 하나"라고 가정한다. 기울기가 2보다 크면 바깥쪽 가지들에 대해서는 별도의 논증이 필요하다.

STEP 너머

여기서의 근 세기는 중간값 정리와 단조성(monotonicity)을 결합한 것이다. 즉 $-\infty$에서 $+\infty$까지 가는 연속인 순증가함수는 정확히 하나의 영점을 가진다. 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 이 두 사실을 실수의 완비성(completeness)으로부터 엄밀하게 증명하며, 같은 논리가 "홀수 차수의 실계수 다항식은 실근을 가진다"와 같은 결과의 바탕이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 내용을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.