풀이

STEP II 2006, 문제 9

역학 • 마찰과 넘어짐

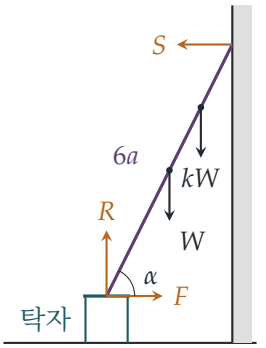
> **STEP II 2006, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q9

핵심 아이디어

사다리와 탁자를 사다리 아래 끝의 접촉으로 연결된 두 개의 별개의 물체로 다룬다. 사다리만 살펴보면 그 아래 끝에서의 수직항력(normal reaction)과 마찰력(friction)을 알 수 있고, 이 힘들은 페인트공이 얼마나 높이 올라가 있는지에 따라 달라진다. 그다음 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 크기는 같고 방향이 반대인 힘이 탁자에 작용한다. 탁자에 대해서는 두 문턱값을 비교한다. 하나는 탁자를 미끄러지게 하는 미는 힘이고, 다른 하나는 먼 쪽 다리에 대한 모멘트(moment)가 탁자 위에 실린 무게의 모멘트를 넘어서게 하는 미는 힘이다.

풀이

사다리는 균일한 막대, 페인트공은 질점, 벽은 매끄러운 면, 탁자는 윗면이 높이 a에 있는 강체로 모형화한다(탁자 윗면의 두께는 무시한다). $\alpha = \arctan 2$로 두면 $\tan\alpha = 2$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다. 페인트공이 사다리를 따라 아래 끝에서 거리 x인 곳에 서 있다고 하자. 여기서 $0 \le x \le 6a$이다.



소문항 (i)

사다리에 작용하는 힘은 다음과 같다. 사다리의 중점에 작용하는 무게 W, 페인트공의 무게 kW, 매끄러운 벽이 주는 수평 방향의 수직항력 S, 그리고 아래 끝에서 위쪽으로 작용하는 수직항력 R과 벽 쪽으로 작용하는 마찰력 F이다. (마찰력은 S와 평형을 이룰 수 있는 유일한 수평 방향의 힘이므로 반드시 벽 쪽을 향해야 한다.)

연직 방향과 수평 방향으로 힘을 분해하면

$$R = (k+1)W, \qquad F = S.$$

사다리의 아래 끝에 대한 모멘트를 생각하자. 사다리의 위 끝은 아래 끝보다 $6a\sin\alpha$만큼 높고, 두 무게는 각각 수평 거리 $3a\cos\alpha$와 $x\cos\alpha$인 곳에 작용하므로

$$S \cdot 6a\sin\alpha = W \cdot 3a\cos\alpha + kW \cdot x\cos\alpha.$$

양변을 $6a\sin\alpha$로 나누고 $\cot\alpha = \frac{1}{2}$를 이용하면

$$F = S = \frac{W}{12}\left(3 + \frac{kx}{a}\right).$$

이 값은 x에 대해 증가하므로, 페인트공이 맨 꼭대기 $x = 6a$에 있을 때 가장 큰 마찰력이 필요하다.

$$F_{\max} = \frac{(3+6k)W}{12} = \frac{(2k+1)W}{4}.$$

얻을 수 있는 최대 마찰력은

$$\tfrac{1}{2}R = \frac{(k+1)W}{2} = \frac{(2k+2)W}{4}.$$

$2k+1 < 2k+2$이므로 페인트공의 모든 위치와 모든 k에 대해 $F \le F_{\max} < \frac{1}{2}R$이다. 따라서 탁자가 고정되어 있으면 페인트공이 아무리 높이 서 있어도 사다리는 결코 미끄러지지 않는다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 $k = 9$이므로 $R = 10W$이고

$$F = \frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right),$$

이 값은 $x = 0$일 때의 $\frac{1}{4}W$에서 $x = 6a$일 때의 $\frac{19}{4}W$까지 증가한다. 소문항 (i)의 결과가 여전히 성립하므로 사다리는 탁자 윗면 위에서 미끄러지지 않는다.

뉴턴의 제3법칙에 의해 사다리는 탁자 윗면의 중심을 아래쪽으로 크기 $R = 10W$인 힘으로 누르고, 벽에서 **멀어지는** 방향으로 수평한 힘 F로 민다. 탁자에는 그 중심에 자신의 무게 $2W$도 작용하며, 지면은 탁자의 다리에 수직항력과 마찰력을 작용한다.

> ? **생각해 보기** 탁자 윗면의 중심을 수평으로 미는 힘이 어떻게 탁자를 기울어지게 할 수 있을까?

미는 힘 F는 높이 a에서 작용하므로, 벽에서 먼 쪽 두 다리의 아래 끝에 대해 모멘트를 가진다. 탁자가 기울어진다면 그 두 다리의 발끝을 잇는 직선을 축으로 회전한다. 다리는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}a$인 정사각형의 꼭짓점에 있으므로, 이 직선은 탁자의 중심에서 수평 거리 $\frac{1}{4}a$만큼 떨어져 있다.

기울어짐. 먼 쪽 다리의 발끝을 잇는 직선에 대해, 먼 쪽 다리에 작용하는 지면의 힘은 모멘트를 가지지 않으며, 어느 다리에 작용하는 지면의 마찰력도 (지면 높이에서 작용하므로) 모멘트를 가지지 않는다. 중심에 아래쪽으로 작용하는 힘 $10W + 2W = 12W$는 복원 모멘트 $12W \cdot \frac{1}{4}a = 3Wa$를 가진다. 미는 힘 F는 탁자를 넘어뜨리려는 모멘트 Fa를 가진다. 이 직선에 대한 모멘트를 생각하면, 벽에 가까운 쪽 두 다리에 작용하는 수직항력의 합 N_1은 다음을 만족한다.

$$N_1 \cdot \tfrac{1}{2}a = 3Wa - Fa,$$

따라서 $N_1 \geq 0$일 필요충분조건은 $F \leq 3W$이다. 탁자가 막 기울어지려는 순간은 $N_1 = 0$일 때, 즉

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 3W \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11a}{3}.$$

미끄러짐. 탁자에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면 지면이 주는 수직항력의 합은 $12W$이므로, 얻을 수 있는 최대 마찰력의 합은 $\frac{1}{3} \cdot 12W = 4W$이다. 수평 방향으로 분해하면 필요한 마찰력은 F이다. 따라서 탁자가 막 미끄러지려는 순간은

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 4W \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5a.$$

두 값 모두 사다리의 길이 $6a$ 안에 있고, 페인트공이 올라감에 따라 F는 꾸준히 증가한다. F는 $4W$에 이르기 전에(이는 $x = 5a$일 때) 먼저 $3W$에 이른다(이는 $x = \frac{11}{3}a$일 때). 따라서 **탁자가 먼저 기울어진다**. 이 일은 페인트공이 사다리를 따라 $\frac{11}{3}a$만큼 올라갔을 때, 즉 탁자

윗면에서 높이 $\frac{11}{3}a\sin\alpha = \frac{22a}{3\sqrt{5}} \approx 3.28a$인 곳에 있을 때 일어난다. 그 순간 지면에서 필요한 마찰력은 $3W$에 불과하여 얻을 수 있는 $4W$보다 작으므로, 탁자는 아직 미끄러지지 않았다.

검산

- 사다리 위에 페인트공이 없을 때($x = 0$) $F = \frac{1}{4}W$이고, 가까운 쪽 다리는 $N_1 = \frac{11}{2}W$를, 먼 쪽 다리는 $\frac{13}{2}W$를 받친다. 미는 힘이 벽에서 멀어지는 방향이므로, 예상대로 먼 쪽 다리가 조금 더 많은 힘을 받는다.
- 컴퓨터로 여러 k와 x 값에 대해 힘을 계산해 보았다. (i)에서 필요한 마찰력과 얻을 수 있는 마찰력의 비의 최댓값은 1보다 약간 작다(꼭대기에서 $\frac{2k+1}{2k+2}$이다). (ii)에서는 가까운 쪽 다리의 수직항력이 $x \approx 3.667a$에서 0이 되고, 지면의 마찰력이 $x = 5a$에서 한계에 이른다.

흔한 실수

- 기울어지는 축을 중심에서 거리 $\frac{1}{2}a$인 탁자의 가장자리로 잡는 실수: 탁자 윗면의 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}a$이므로 폭의 절반은 $\frac{1}{4}a$이다.
- 탁자를 미는 힘이 지면 높이가 아니라 다리의 위 끝인 높이 a에서 작용한다는 것을 잊는 실수. 미는 힘이 탁자를 넘어뜨리려는 모멘트를 갖는 것은 바로 이 높이 때문이다.
- 지면이 탁자에 주는 수직항력을 구할 때 사다리와 페인트공의 $10W$를 빠뜨리는 실수. 탁자 자신의 무게 $2W$만으로는 부족하다.

STEP 너머

이 문제는 강체계가 서로 경쟁하는 여러 방식, 즉 미끄러짐이나 넘어짐으로 평형을 잃는 상황을 다룬다. 방법은 각각의 문턱값을 구하고 하중이 어느 쪽에 먼저 도달하는지 보는 것이다. 공학자들은 같은 아이디어를 옹벽, 크레인, 쌓아 올린 짐에 적용하며, 정역학(statics) 강의에서는 이것이 가상일의 원리(principle of virtual work)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 평형과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.