풀이

STEP II 2006, 문제 8

순수수학 • 직선의 벡터 기하

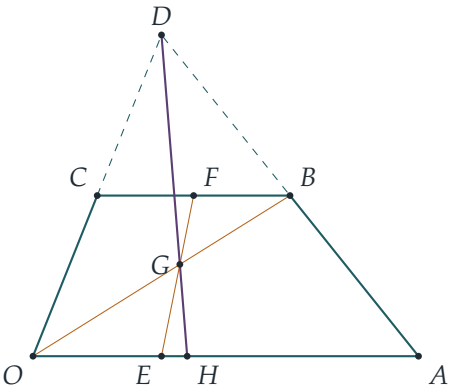
STEP II 2006, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s2-q8

핵심 아이디어

이 문제에 나오는 모든 점은 두 직선의 교점으로 정의되므로, 문제 전체가 하나의 정해진 절차로 풀린다. 각 직선을 첫 번째 소문항에서 구한 꼴로 나타내고, 두 식을 같다고 놓은 다음, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$의 계수를 비교(comparing coefficients)한다. 이렇게 비교해도 되는 까닭은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$가 평행(parallel)하지 않아서, 어떤 벡터(vector)를 $p\mathbf{a} + q\mathbf{c}$ 꼴로 나타내는 방법이 오직 한 가지뿐이기 때문이다.



풀이

직선의 방정식

위치벡터(position vector)가 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$인 두 점을 지나는 직선은 $\mathbf{x}$를 지나고 방향이 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$이므로, 이 직선 위의 점은

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y},$$

이고, 여기서 α는 모든 실수를 움직인다. $\alpha = 0$이면 $\mathbf{x}$, $\alpha = 1$이면 $\mathbf{y}$가 되고, 두 계수의 합은 항상 1임에 주목하자. 이것이 구하는 꼴이다.

이 풀이 전체에서 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$는 평행하지 않다(평행하다면 O, A, C가 한 직선 위(collinear)에 있게 되어 사다리꼴(trapezium)이 만들어지지 않는다). 따라서 $p\mathbf{a} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{a} + q'\mathbf{c}$이면 $p = p'$이고 $q = q'$이다.

소문항 (i)

CB가 OA에 평행하므로 벡터 $\overrightarrow{CB}$는 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$의 스칼라배(scalar multiple)이다. 이를 $\lambda\mathbf{a}$라 하자. 그러면

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}.$$

$OABC$를 차례로 돌면 $\overrightarrow{CB}$는 $\overrightarrow{OA}$와 같은 방향을 향하므로 $\lambda > 0$이고, $CB < OA$이므로 $\lambda < 1$이다. 따라서 $0 < \lambda < 1$이며, 특히 $\lambda \neq 1$인데, 이 사실은 뒤에서 필요하다.

소문항 (ii)

E와 F. 이 두 점은 비율에서 곧바로 얻는다.

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

D. 직선 OC 위의 점은 $\mu\mathbf{c}$이다. 직선 AB 위의 점은

$$(1-\beta)\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1 - \beta + \beta\lambda)\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}.$$

D에서 이 둘이 일치한다. 계수를 비교하면 $\beta = \mu$이고 $1 - \beta(1-\lambda) = 0$이므로 $\beta = \dfrac{1}{1-\lambda}$이다($\lambda \neq 1$이므로 문제없다). 따라서

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1-\lambda}\,\mathbf{c}.$$

$\frac{1}{1-\lambda} > 1$이므로, D는 당연히 그래야 하듯 OC를 C 너머로 연장한 직선 위에 있다.

G. OB 위의 점은 $t(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c})$이다. EF 위의 점은

$$(1-s)\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + s(\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{2}\lambda s)\mathbf{a} + s\mathbf{c}.$$

$\mathbf{c}$의 계수를 비교하면 $s = t$이고, 이어서 $\mathbf{a}$의 계수를 비교하면

$$\lambda t = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2}\lambda t \quad\Longrightarrow\quad t\Big(\frac{3\lambda+2}{6}\Big) = \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{2}{3\lambda+2}.$$

따라서

$$\mathbf{g} = \frac{2}{3\lambda+2}(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}).$$

H. 직선 DG 위의 점은

$$(1-k)\mathbf{d}+k\mathbf{g} = \frac{2k\lambda}{3\lambda+2}\mathbf{a} + \Big(\frac{1-k}{1-\lambda}+\frac{2k}{3\lambda+2}\Big)\mathbf{c}.$$

? **생각해 보기** 이 직선 위의 점 가운데 OA 위에 있는 점은 어떻게 골라낼까?

직선 OA 위의 점은 $\mathbf{a}$만의 배수이므로 $\mathbf{c}$의 계수가 사라져야 한다. 양변에 $(1-\lambda)(3\lambda+2)$를 곱하면

$$\begin{aligned}(1-k)(3\lambda+2)+2k(1-\lambda) &= 0\\ (3\lambda+2)-k(3\lambda+2-2+2\lambda) &= 0\\ k &= \frac{3\lambda+2}{5\lambda}.\end{aligned}$$

그러면 $\mathbf{a}$의 계수는

$$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}\cdot\frac{3\lambda+2}{5\lambda} = \frac{2}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{h} = \tfrac{2}{5}\,\mathbf{a}.$$

답을 모으면 다음과 같다.

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{c}}{1-\lambda}, \quad \mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \quad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}, \quad \mathbf{g} = \frac{2(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})}{3\lambda+2}, \quad \mathbf{h} = \tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

$OH = \frac{2}{5}OA$이고 $HA = \frac{3}{5}OA$이므로

$$OH : HA = 2:3,$$

이며, 이는 사다리꼴의 모양과 상관없이 성립한다.

검산

- $\mathbf{a} = (6,0)$, $\mathbf{c} = (1,2.5)$, $\lambda = \frac{1}{2}$로 잡자(그림의 경우). 공식에 따르면 $D = (2,5)$, $G \approx (2.286, 1.429)$, $H = (2.4,0)$이다. D에서 G까지의 기울기는 $-3.571/0.286 = -12.5$이고, D에서 H까지의 기울기 $-5/0.4$도 같은 값이다. 따라서 D, G, H는 실제로 한 직선 위에 있다.
- H에 대한 답은 λ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$에 의존하지 않는다. 컴퓨터로 무작위 사다리꼴 2000개에 대해 전체 작도를 정확한 유리수 산술(rational arithmetic)로 반복해 보았더니 매번 $OH : HA = 2:3$이 나왔다.
- $\lambda \to 1$이면 변 OC와 AB가 평행해지고, 당연히 그래야 하듯 $\mathbf{d} = \mathbf{c}/(1-\lambda)$는 무한히 멀어진다.

흔한 실수

- 서로 다른 두 직선에 같은 매개변수(parameter) 문자를 쓰는 것. 두 식을 같다고 놓기 전에 각 직선마다 따로 매개변수를 두어야 한다.
- 계수를 비교하면서 왜 그래도 되는지 밝히지 않는 것. 계수 비교가 성립하는 것은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$가 평행하지 않기 때문이다.
- $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$라고 쓰는 것. $\mathbf{a}$에 평행한 것은 $\overrightarrow{AB}$가 아니라 $\overrightarrow{CB}$이다.

STEP 너머

답 2 : 3이 사다리꼴의 모양에 의존하지 않는 까닭은, 모든 단계에서 직선, 교점, 직선 위의 비율만을 사용하는데 아핀 변환(affine map, 선형 변환(linear map) 다음에 평행이동(translation)을 한 것)은 이것들을 모두 보존하기 때문이다. 따라서 사다리꼴을 다루기 편한 사다리꼴, 예를 들어 $OABC$에서 C가 O의 바로 위에 있는 사다리꼴로 옮긴 다음 거기서 계산해도 된다. 이것이 **아핀 기하학**(*affine geometry*)의 아이디어이며, 계수 꼴 $(1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 선형 변환과 좌표를 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 벡터 기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.