풀이

STEP II 2006, 문제 7

순수수학 • 타원의 접선

> **STEP II 2006, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q7

핵심 아이디어

접선(tangent)은 "x^2을 xx_0으로, y^2을 yy_0으로 바꾸는" 공식을 쓰면 가장 빨리 구할 수 있고, 음함수 미분(implicit differentiation)으로 구해도 된다. 작도 부분은 Q의 좌표와 PQ의 방정식을 구한 다음, 일반적인 점에서의 접선과 비교하면 된다. $\tan(\alpha/2) = k$라는 표현은 강력한 힌트이다. 이는 $\cot\alpha$와 $\operatorname{cosec}\alpha$를 $t = \tan(\alpha/2)$로 나타내라는 뜻이다.

풀이

접선

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$을 x에 대하여 음함수 미분하면

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

$\sin\alpha \neq 0$일 때(그렇지 않으면 접선이 수직선이 되어 주어진 방정식이 의미가 없다) 점 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$에서의 기울기(gradient)는

$$-\frac{b^2a\cos\alpha}{a^2b\sin\alpha} = -\frac{b\cot\alpha}{a}.$$

따라서 접선은

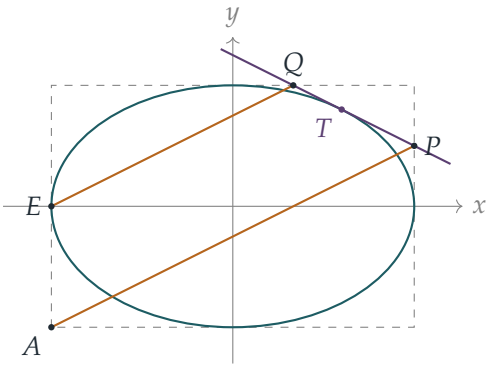
$$y - b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}(x - a\cos\alpha)$$

$$\implies \quad y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + \frac{b(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha},$$

즉 $y = -\dfrac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$이고, 이것이 구하려던 식이다.

작도

다음은 $a = 3, b = 2, k = \frac{1}{2}$일 때의 그림이다. 타원(ellipse)은 꼭짓점이 $(\pm a, \pm b)$인 직사각형 안에 들어 있다. A는 왼쪽 아래 꼭짓점, E는 왼쪽 변의 중점이고, P는 오른쪽 변 위에, Q는 위쪽 변 위에 있다.



직선 AP는 $(-a, -b)$와 (a, kb)를 잇므로 기울기는

$$\frac{kb-(-b)}{a-(-a)} = \frac{(1+k)b}{2a}.$$

$E(-a, 0)$을 지나고 이에 평행한 직선은 $y = \dfrac{(1+k)b}{2a}(x+a)$이다. $y = b$를 대입하면 $x + a = \dfrac{2a}{1+k}$이므로

$$Q = \left(\frac{a(1-k)}{1+k},\ b\right).$$

이제 PQ의 기울기는

$$\frac{b-kb}{\dfrac{a(1-k)}{1+k} - a} = \frac{b(1-k)}{\dfrac{-2ak}{1+k}} = -\frac{b(1-k^2)}{2ak},$$

이고, $k \neq 0$이므로 문제없다. 점 $P(a, kb)$를 이용하면 직선 PQ는

$$y = kb - \frac{b(1-k^2)}{2ak}(x-a) = -\frac{b(1-k^2)}{2ak}\,x + \frac{2k^2b + b(1-k^2)}{2k},$$

따라서

$$PQ: \qquad y = -\frac{b}{a}\cdot\frac{1-k^2}{2k}\,x + b\cdot\frac{1+k^2}{2k}.$$

생각해 보기 이것이 타원 위 어떤 점에서의 접선임을 어떻게 알아볼 수 있을까?

위에서 구한 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$에서의 접선과 비교하자. $\cot\alpha = \dfrac{1-k^2}{2k}$이고 $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1+k^2}{2k}$인 α가 필요하다. 이는 바로 t-공식이다. $t = \tan(\alpha/2)$라 하면

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \cot\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+t^2}{2t}.$$

$0 < k < 1$이므로 $\alpha = 2\arctan k$로 잡을 수 있고, 이 값은 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $\sin\alpha \neq 0$이며 $\tan(\alpha/2) = k$이다. $t = k$로 두면 두 식이 PQ의 기울기와 절편(intercept)에 모두 일치한다. 따라서 PQ는 직선 $y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$이고, 이는 $\tan(\alpha/2) = k$인 점 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$에서 타원에 그은 접선이다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

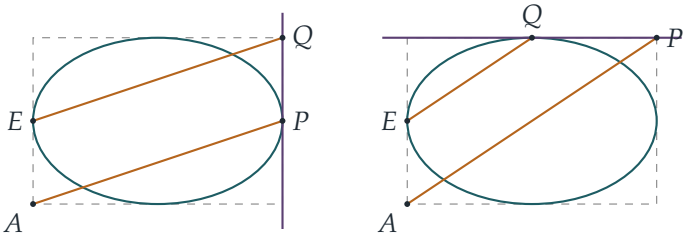
좌표로 나타내면 접점은 $T = \left(\dfrac{a(1-k^2)}{1+k^2}, \dfrac{2kb}{1+k^2}\right)$이다.

$k = 0$과 $k = 1$인 경우

위의 계산에서는 k로 나누었고, 접선 공식에는 $\sin\alpha \neq 0$이 필요하므로, 이 경우에는 작도를 직접 다시 해 본다.

$k = 0$. 이때 $P = (a, 0)$이고 AP의 기울기는 $\frac{b}{2a}$이다. E를 지나고 이에 평행한 직선은 $y = \frac{b}{2a}(x + a)$이고, 이 직선은 $y = b$와 $x = a$에서 만나므로 $Q = (a, b)$이다. 그러면 PQ는 수직선 $x = a$이다. 이것은 $\alpha = 0$인 점 $(a, 0)$에서 타원에 그은 접선이고, $\tan(0/2) = 0 = k$이다. 따라서 접선을 $y = mx + c$ 꼴로 쓸 수는 없지만 결과는 **여전히** 성립한다.

$k = 1$. 이때 $P = (a, b)$이고 AP는 직사각형의 대각선으로, 기울기는 $\frac{b}{a}$이다. E를 지나고 이에 평행한 직선은 $y = \frac{b}{a}(x + a)$이고, 이 직선은 $y = b$와 $x = 0$에서 만나므로 $Q = (0, b)$이다. 그러면 PQ는 수평선 $y = b$이고, 이는 타원의 맨 위 점 $(0, b)$에서의 접선이다. 이 점은 $\alpha = \frac{\pi}{2}$인 점이고 $\tan(\pi/4) = 1 = k$이다. 따라서 이 경우에도 결과가 성립한다(공식도 통한다. $\cot\frac{\pi}{2} = 0$이고 $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$이므로 $y = b$가 된다).



검산

- $a = 3, b = 2, k = \frac{1}{2}$로 잡자. 그러면 $Q = (1, 2)$이고 PQ는 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$이다. 또 $\tan\alpha = \frac{4}{3}$이므로 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$이고 $T = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$이다. 이 점은 PQ 위에 있고$(-\frac{9}{10} + \frac{5}{2} = \frac{8}{5})$, 그 점에서의 기울기는 $-\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{4 \cdot 9/5}{9 \cdot 8/5} = -\frac{1}{2}$이다.
- PQ를 타원의 방정식에 대입하면 중근(repeated root)을 갖는 이차방정식이 나와야 한다. 이것과 Q, PQ에 대한 공식을 무작위로 고른 a, b, k 천 개에 대하여 수치적으로 확인하였다.
- $k \to 0^+$일 때 $T \to (a, 0)$이고, $k \to 1^-$일 때 $T \to (0, b)$이다. 이는 두 끝 경우와 일치한다.

흔한 실수

- PQ의 기울기에서 부호를 틀리는 것. 분모 $\frac{a(1-k)}{1+k} - a$는 음수이다.
- $\operatorname{cosec} 0$이 정의되지 않으므로 $k = 0$에서 결과가 성립하지 않는다고 말하는 것. 공식은 무너지지만 기하학적 사실은 그대로이다. PQ는 여전히 $\alpha = 0$에서의 접선이다.

STEP 너머

치환 $t = \tan(\alpha/2)$는 타원의 유리 매개화(rational parametrisation) $(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2})$이다. 이는 삼각함수의 적분을 유리함수의 적분으로 바꾸고, 모든 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)을 찾아내는 것과 같은 아이디어이다. 모든 이차곡선(conic)은 이처럼 유리 매개화할 수 있으며, 여기서처럼 평행선과 교점만으로 이루어지는 작도는 사영기하학(projective geometry)의 주제이다. 이것이 정수론(number theory)과 어떻게 연결되는지 처음 살펴보고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.