풀이

STEP II 2006, 문제 5

순수수학 • 바닥 함수와 넓이

> **STEP II 2006, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q5

핵심 아이디어

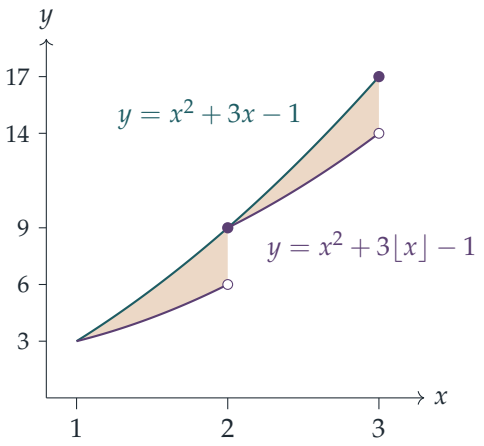
연속한 두 정수 사이, 즉 $k \le x < k+1$에서 바닥 함수(floor function)는 상수이고 그 값은 k이다. 따라서 이러한 각 단위 구간 위에서 들쭉날쭉한 곡선은 평범하고 매끄러운 곡선이 되며, 넓이는 단위 구간마다 하나씩 있는 띠들의 합으로 나뉜다. $[k, k+1]$ 위의 띠의 넓이를 k의 함수로 구한 다음, $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대한 띠들을 모두 더한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $f(x) = x^2 + 3x - 1$이라 하자. $1 \le x \le 3$에서 이 함수는 $f(1) = 3$에서 $f(2) = 9$를 거쳐 $f(3) = 17$까지 증가하며, $x \ge 1$인 모든 x에서 $f'(x) = 2x + 3 > 0$이므로 증가함수(increasing function)이다.

소문항 (i)

두 번째 곡선은 $y = x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1$이다. $[1, 2)$에서는 $\lfloor x \rfloor = 1$이므로 $y = x^2 + 2$이고, 3에서 6을 향해 증가한다. $[2, 3)$에서는 $\lfloor x \rfloor = 2$이므로 $y = x^2 + 5$이고, 9에서 14를 향해 증가한다. 그리고 $x = 3$에서 그 값은 17이다. 각 조각은 포물선(parabola) $y = f(x)$를 아래로 평행이동한 것이며, 두 곡선은 모든 정수에서 만난다.



두 곡선 사이의 수직 간격은

$$(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1) = 3(x - \lfloor x \rfloor) \geq 0,$$

이므로 첫 번째 곡선은 결코 두 번째 곡선보다 아래에 있지 않다. k가 정수일 때 구간 $[k, k+1]$에서 간격은 한 점 $x = k+1$을 제외하면 $3(x-k)$이고, 이 한 점은 적분(integral)에 영향을 주지 않는다. 따라서 $[k, k+1]$ 위의 띠의 넓이는

$$\int_k^{k+1} 3(x-k)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}(x-k)^2\right]_k^{k+1} = \tfrac{3}{2},$$

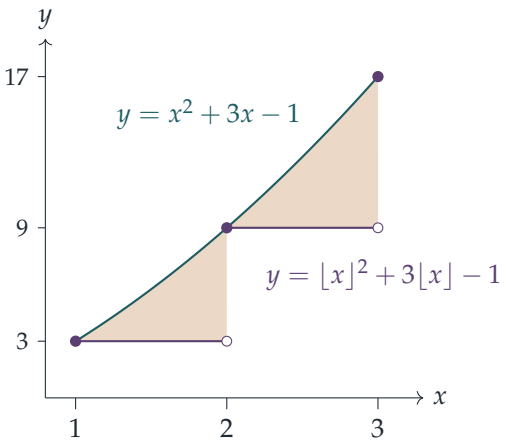
로, 모든 k에 대해 같다. 구간 $1 \leq x \leq n$은 $n-1$개의 단위 구간 $[1,2], [2,3], \ldots, [n-1, n]$으로 이루어지므로, 두 곡선 사이의 넓이는

$$\tfrac{3}{2}(n-1).$$

이다.

소문항 (ii)

이번에는 두 번째 곡선이 $y = f(\lfloor x \rfloor)$로, 계단 함수(step function)이다. $[1,2)$에서 $y = f(1) = 3$, $[2,3)$에서 $y = f(2) = 9$이고, $x = 3$에서 $y = f(3) = 17$이다. 각 계단은 정수에서 포물선 위의 점에서 시작하여 오른쪽으로 수평하게 뻗는다.



생각해 보기 어느 곡선이 위에 있으며, 계속 위에 있는가?

$x \geq 1$에서 f는 증가하고 $\lfloor x \rfloor \leq x$이므로, $1 \leq x \leq n$ 전체에서 $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$이다. 따라서 포물선이 항상 위에 있고, 넓이는 단순히 $f(x) - f(\lfloor x \rfloor)$의 적분이며 부호가 바뀌는 것을 걱정할 필요가 없다.

$k \geq 1$이 정수일 때 $[k, k+1]$에서 계단의 높이는 $f(k)$이다(여기서도 한 점 $x = k+1$은 무시한다). $0 \leq t \leq 1$로 두고 $x = k + t$를 대입하면

$$\begin{aligned} f(k+t) - f(k) &= (k+t)^2 + 3(k+t) - 1 - (k^2 + 3k - 1) \\ &= 2kt + t^2 + 3t, \end{aligned}$$

이므로 $[k, k+1]$ 위의 띠의 넓이는

$$\int_0^1 (2kt + t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} = k + \tfrac{11}{6}.$$

이다. 소문항 (i)과 달리 이번에는 포물선이 점점 가팔라지므로 띠의 넓이가 k와 함께 커진다. $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대한 띠들을 더하고 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{11}{6}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)(3n+11), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

▶ $n = 1$이면 영역이 전혀 없고, 두 답 모두 0이 된다.

- $n = 2$이면 소문항 (ii)의 답은 $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 17 = \frac{17}{6}$이다. 직접 계산하면 $\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{17}{6}$이다.
- $n = 2, \ldots, 7$에 대해 간격을 중점 규칙(midpoint rule)으로 수치 적분한 결과는 소수점 아래 넷째 자리까지 $\frac{3}{2}(n-1)$ 및 $\frac{1}{6}(n-1)(3n+11)$과 일치했다. 예를 들어 $n = 4$이면 소문항 (ii)에서 11.5가 나온다.

흔한 실수

- 띠를 $n-1$개가 아니라 n개로 세는 실수. 구간 $[1, n]$에는 단위 구간이 $n-1$개뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 k 대신 $\int_0^1 2kt\,\mathrm{d}t = 2k$로 계산하는 실수.
- 먼저 정수에서 구간을 나누지 않고, 구간 전체에서 $\lfloor x \rfloor$를 x인 것처럼 적분하는(또는 아예 무시하는) 실수.

STEP 너머

소문항 (ii)는 곡선 아래의 넓이를 그 아래에 놓인 직사각형 "계단"의 넓이와 비교하는데, 이것은 정확히 계단 폭이 1인 리만(Riemann) 하합(lower Riemann sum)이다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 적분은 계단이 좁아짐에 따라 이러한 하합과 상합(upper sum)을 맞붙여 조여 가는 방식으로 **정의**되며, $\lfloor x \rfloor$처럼 불연속 점프가 있는 함수도 그 점프들이 고립된 점이므로 여전히 적분 가능(integrable)하다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 리만 적분을 매우 읽기 쉽게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.